Triangulierungen und Kartographie

Ein Einblick in geometrische und topologische Methoden

Stefan Krauss, Clara Löh
Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg
30. Oktober 2015

Was verraten Dreiecke über die Welt?

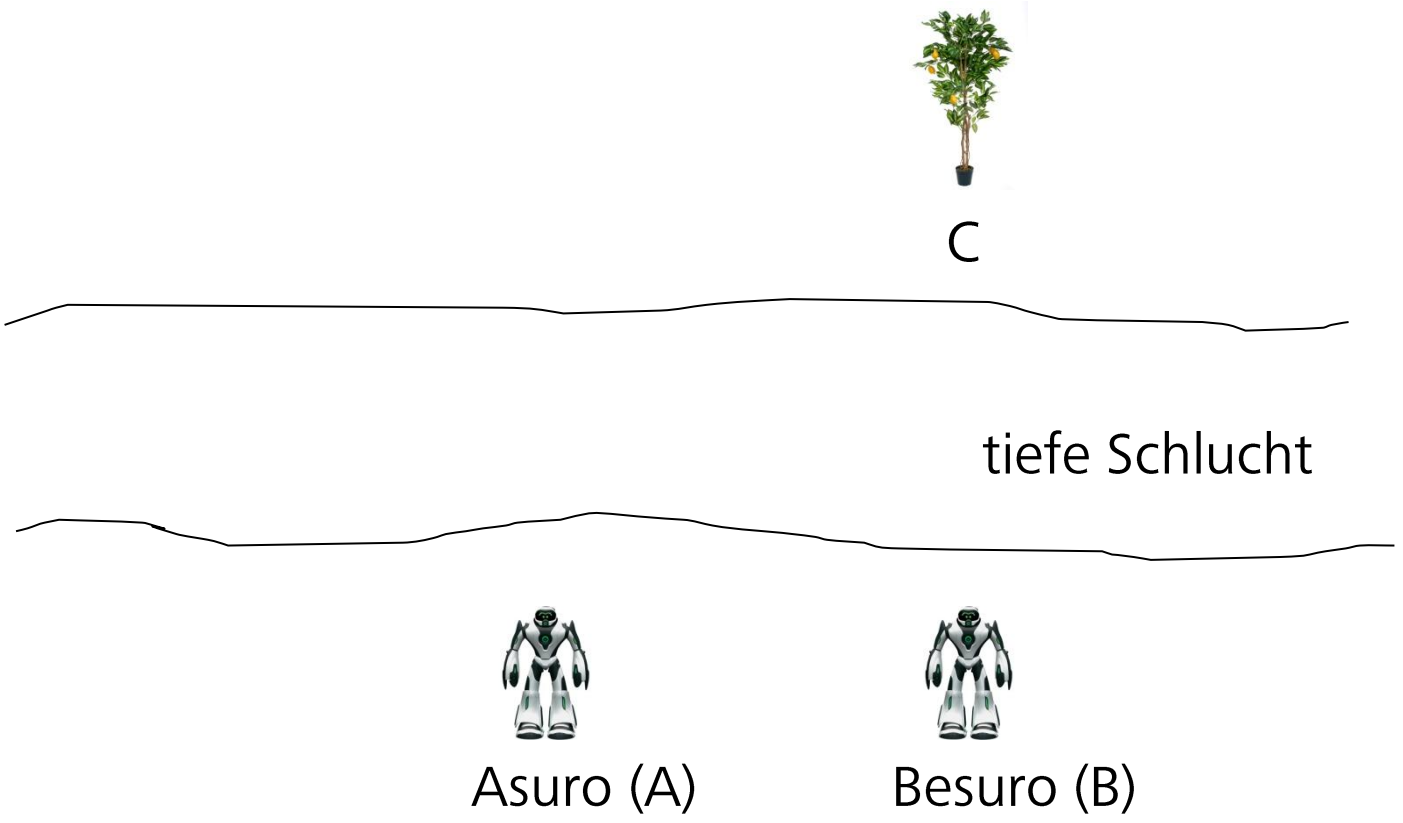
Clara Löh & Stefan Krauss
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

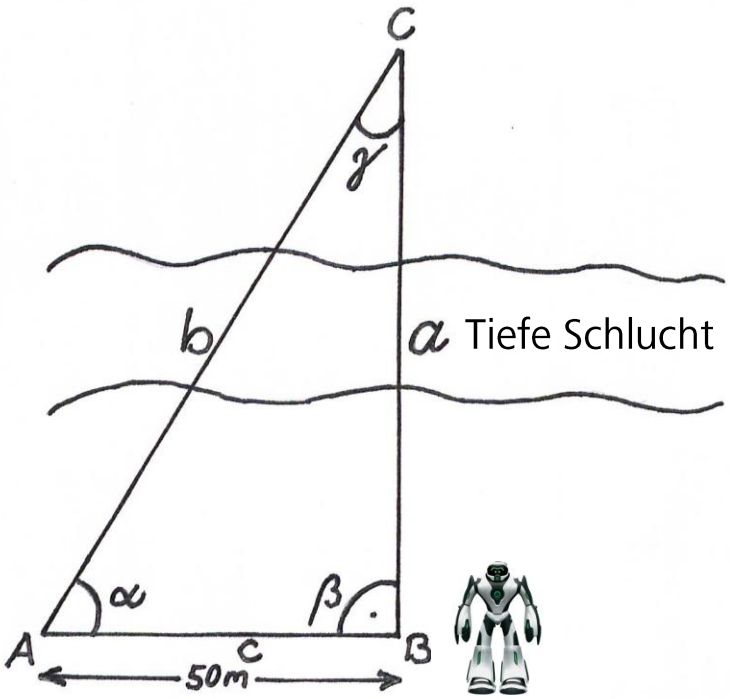
Was uns über die Welt verraten

Universität Regensburg – 30. Oktober 2015

Universität Regensburg

- Zwei Roboter Asuro (A) und Besuro (B) wollen die Entfernung zu einem Baum messen.
- Leider liegt eine tiefe Schlucht zwischen ihnen und dem Baum (da es sich um einen Citronenbaum handelt, nennen wir ihn C).





Asuro (A) und Besuro (B) haben beide einen Kompass dabei und können so die Winkel α und β bestimmen.

Außerdem haben sie ein 50 m langes Maßband dabei. Zwischen Asuro und Besuro ist dieses Maßband gespannt.

In der Zeichnung gilt: $c = 50$ m, $\alpha = 50°$, $\beta = 90°$

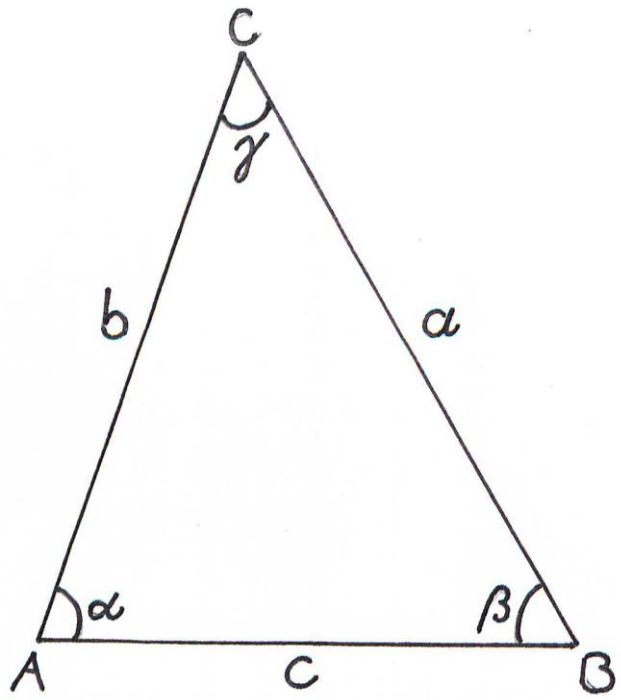
Wie weit ist Besuro (B) vom Citronenbaum (C) entfernt?

Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$\tan\alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{a}{c}$$

$$\rightarrow a = c \cdot \tan\alpha = 50\text{ m} \cdot \tan 50° \approx 60\text{ m}$$

In der Realität ist es oft schwierig, *genau* einen rechten Winkel zu erhalten. Doch auch für ein Dreieck mit beliebigen Winkeln α, β, γ gibt es einen Satz, der es erlaubt, entsprechende Entfernungen zu bestimmen, den sog. *Sinussatz:*



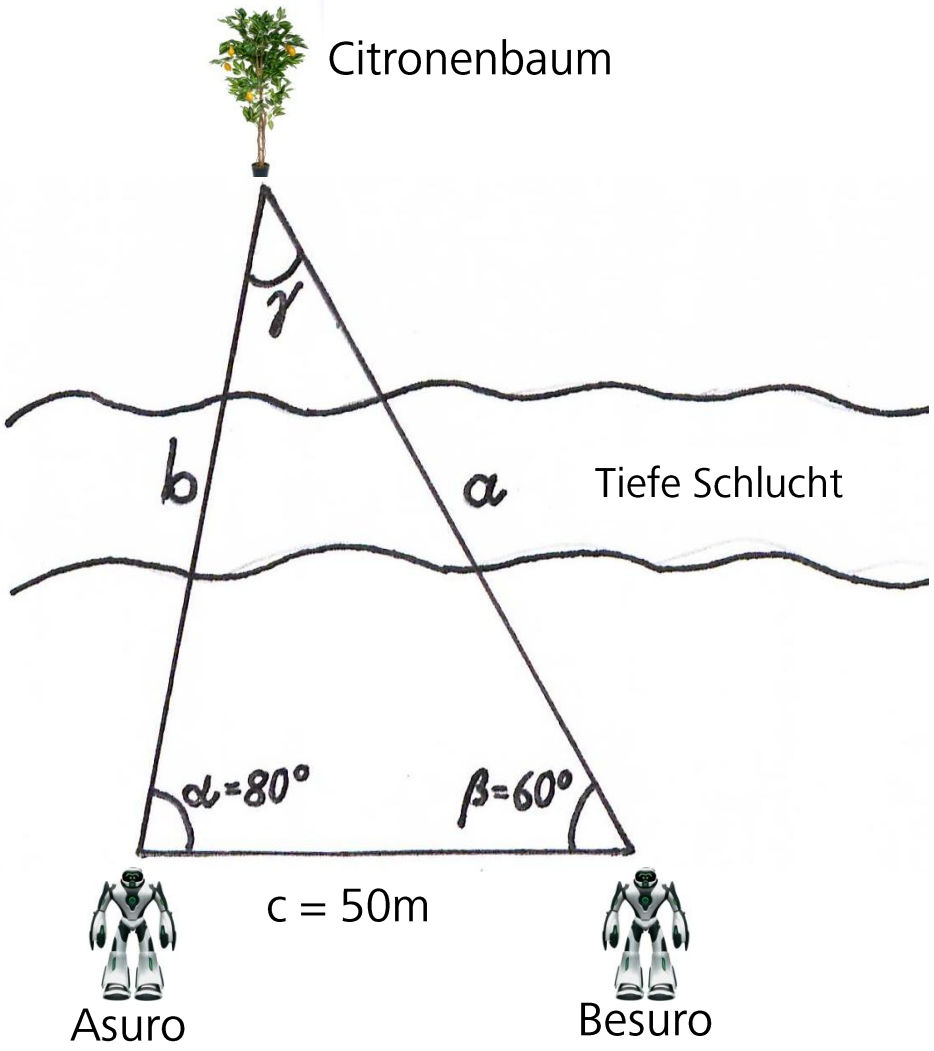
Es gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

oder:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

Kennen Asuro und Besuro die Winkel α und β, lassen sich wieder die Entfernungen zum Citronenbaum berechnen:



Bestimmen wir dieses Mal die Entfernung des Baumes von Asuro, also die Länge der Seite b.

Aus $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ folgt:

$$b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{50m \cdot \sin 60°}{\sin (180° - 80° - 60°)} \approx 67m$$

Aufgaben

1) Bestimme den Abstand von Besuro zum Baum, wenn $\alpha = 70°$, $\beta = 65°$ und $c = 40$ m!

2) Wie weit ist der Stern Aldebaran von der Erde entfernt?

   (Angaben siehe ausgeteiltes Aufgabenblatt)

Global Positioning System (GPS)

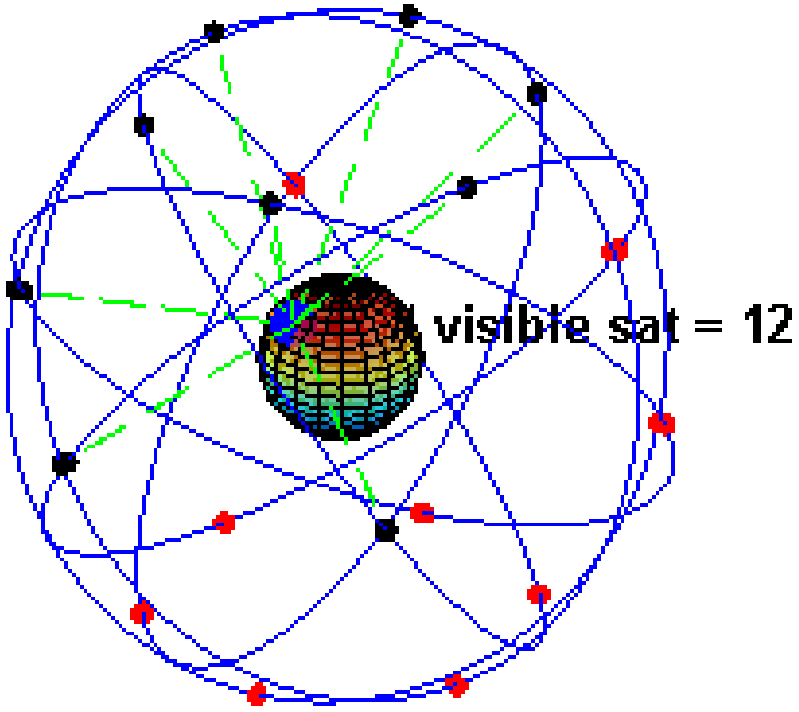
Offizieller Name: NAVSTAR GPS
NAVSTAR = Navigation Satellite using Time and Range

- Ab 1973 vom US-Verteidigungsministerium entwickelt.

- Der erste Satellit wurde 1977 ins All geschossen.
  1983 war das System einsatzbereit.
  Seit 1993 umkreisen 24 GPS Satelliten die Erde.

- Für eine exakte Positionsbestimmung sollten möglichst vier Satellitensignale aus unterschiedlichen Himmelsrichtungen zur Verfügung stehen.

- Heute hat das zivile GPS eine Genauigkeit von ca. 10 Metern, das militärische von einigen Zentimetern.



Quelle: wikipedia

Entfernung eines Gewitters

- Zeit zwischen Blitzeinschlag und Eintreffen des Donners:
  z.B. 3 Sekunden

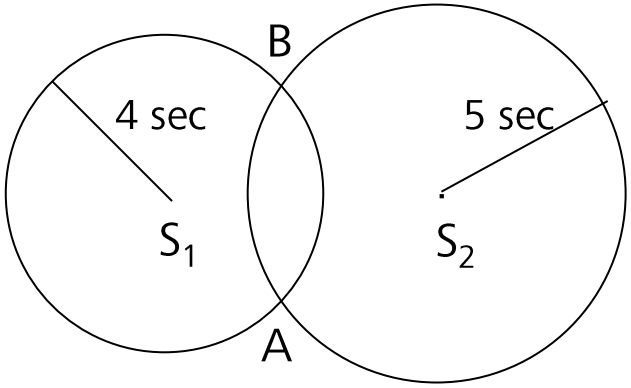
- Da man weiß, dass sich Schall in Luft mit ca. 340 m/s ausbreitet und da die Lichtgeschwindigkeit im Vergleich dazu so hoch ist, dass die Laufzeit des Lichts vernachlässigt werden kann, weiß man, dass das Gewitter etwa 1 Kilometer entfernt ist.

- Dabei handelt es sich allerdings noch nicht um eine *Positionsbestimmung*, sondern lediglich um eine *Entfernungsbestimmung.*

- Mit mehreren Entfernungsbestimmungen lässt sich jedoch eine Positionsbestimmung durchführen.

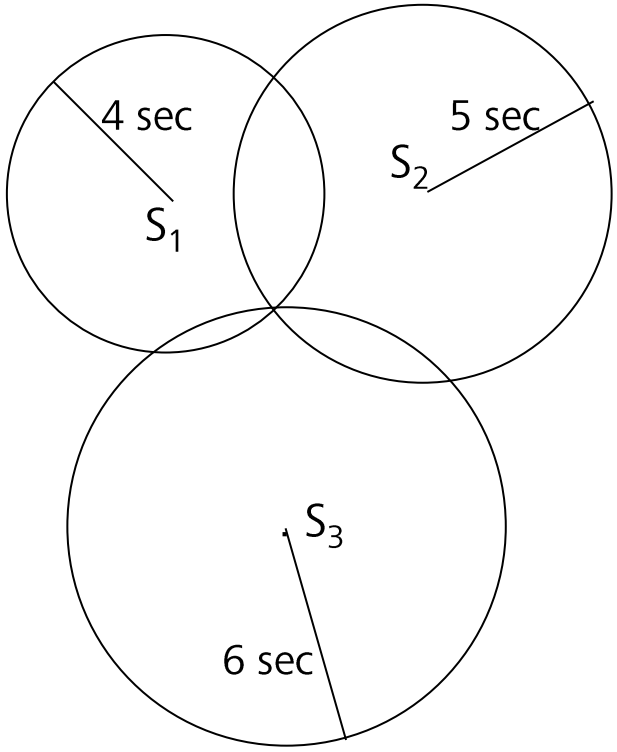
GPS in einer zweidimensionalen Welt

Stark vereinfacht gesagt, sendet jeder Satellit S eine Nachricht der folgenden Art: „Ich bin Satellit Nr. X, meine Position ist gerade Y und diese Nachricht wurde zum Zeitpunkt Z versandt.“



Wenn wir wissen, wo sich S_1 befindet und das Signal von S_1 aus 4 Sekunden zu uns benötigt, wissen wir, dass sich unsere Position auf der Kreislinie um S_1 befindet.
Empfangen wir von einem weiteren Satelliten S_2 noch ein Signal, das 5 Sekunden zu uns unterwegs war, bleiben nur noch die zwei Schnittpunkte der Kreise als mögliche Positionen (A und B).

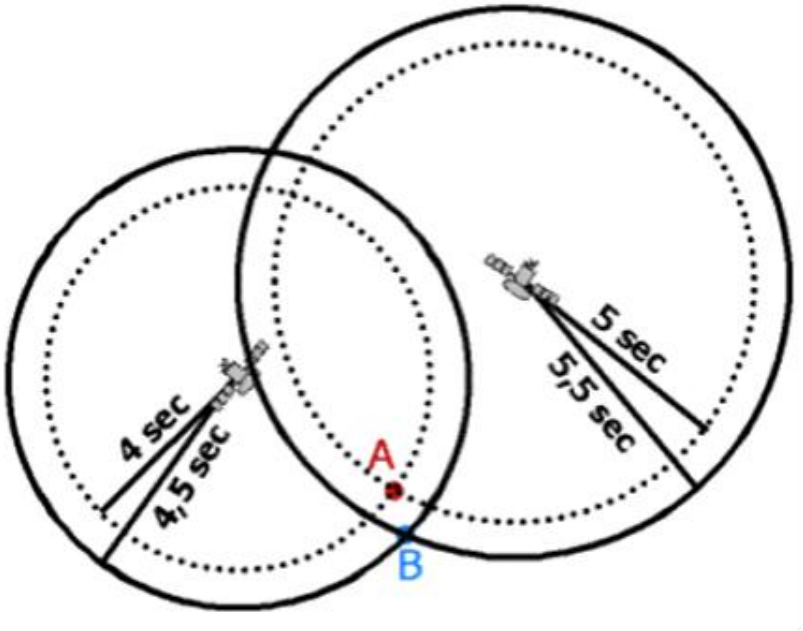
Somit ist klar, dass man in einer zweidimensionalen Welt mindestens 3 Satelliten braucht, um seine Position exakt zu bestimmen:



Problem:

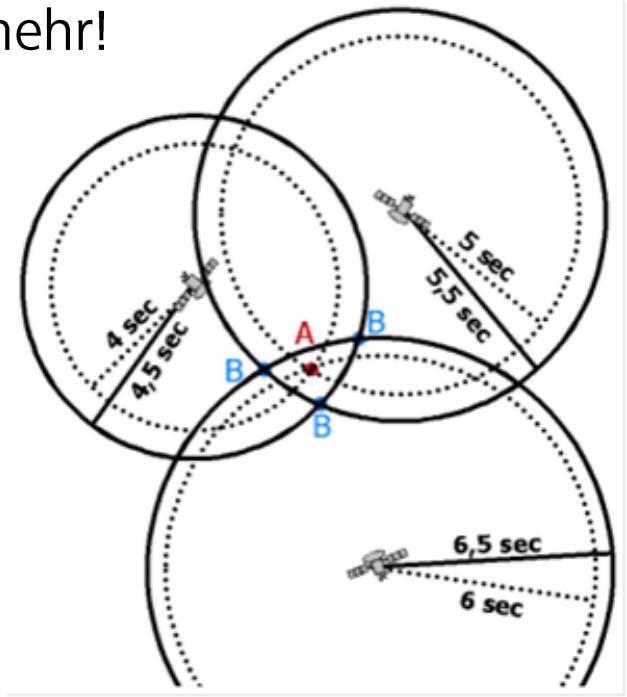
- Die Uhren aller Satelliten gehen (zwar) absolut genau und synchron (schließlich sind Atomuhren an Bord).
- Aber GPS-Empfänger haben „nur“ Quarzuhren, die im Vergleich zu Atomuhren ziemlich ungenau gehen.
- Ein Uhrenfehler von einer Hundertstelsekunde kann in der GPS-Navigation eine Fehlbestimmung der Position um ca. 3000 km ausmachen!
- Für eine Genauigkeit von 10 Metern müsste die Empfängeruhr bis auf 0,00000003 Sekunden genau sein.

Beispiel für die zweidimensionale Welt



- Die Uhr im GPS-Empfänger geht gegenüber den Satellitenuhren eine halbe Sekunde vor.
- Die Laufzeit der Signale scheint uns um 0,5 Sekunden länger.
- Wir glauben, an Punkt B anstatt an Punkt A zu sein (die durchgezogenen Kreise werden auch als „Pseudoranges“ bezeichnet).

Bei 3 Satelliten fällt der Uhrenfehler sofort auf, denn man erhält keinen gemeinsamen Schnittpunkt mehr!



- Man kann die Zeit der Empfängeruhr nun aber solange verschieben, bis aus den 3 Schnittpunkten B ein Schnittpunkt A wird.

- Mit 3 Satelliten ist in der zweidimensionalen Welt also eine exakte Positionsbestimmung möglich (inklusive der Korrektur des Uhrenfehlers!)

Aufgabe 3

GPS:

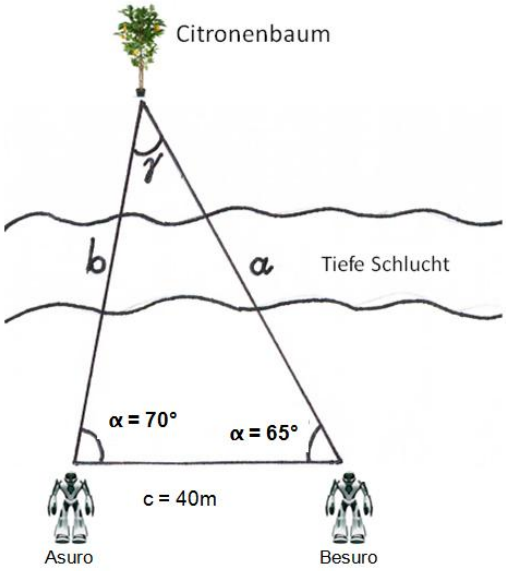
Wie viele Satelliten benötigt man in unserer dreidimensionalen Welt (inklusive Korrektur des Uhrenfehlers), um die Position eines Objektes (auf der Erdoberfläche bzw. im erdnahen Raum) zu bestimmen?

Überlege dazu, wie der Schnitt von n (n = 2, 3, 4, …) Kugeloberflächen aussieht!

Aufgaben

1) Abstandsberechnung

Bestimme den Abstand von Besuro zum Baum, wenn $\alpha = 70°$, $\beta = 65°$ und $c = 40$ m.



2) Berechnung weit entfernter Sterne

Die Entfernung Erde – Sonne beträgt ca. 153.000.000 km. Mithilfe dieser Entfernung lässt sich zum Beispiel der Abstand zu einem weit entfernten Stern berechnen.
Der sogenannte Parallaxenwinkel P beträgt 0,00001359° (in der Abbildung zur Veranschaulichung viel größer gezeichnet).

a) Wie weit ist der Stern Aldebaran von der Erde in Kilometern entfernt?

b) Die Angabe in Kilometern ist bei sehr großen Entfernungen oft sehr unpraktisch. Deshalb verwendet man für große Entfernungen zwei neue Einheiten:

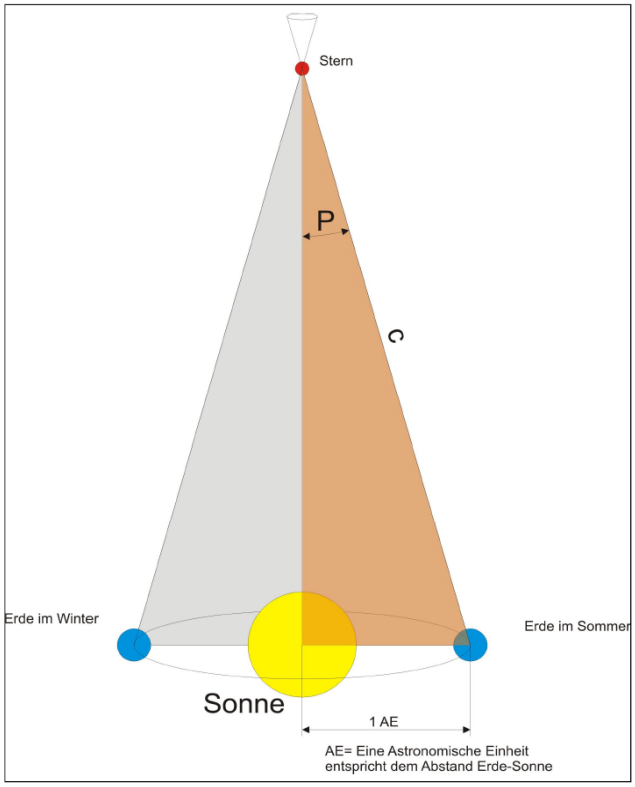
i) Astronomische Einheit (AE):

1 AE ≈ 153.000.000 km
(Entfernung Erde – Sonne)

ii) Lichtjahr (LJ):

1 LJ ≈ $9{,}5 \cdot 10^{12}$ km

Wie vielen Astronomischen Einheiten (AE) bzw. wie vielen Lichtjahren (LJ) entspricht die in a) berechnete Entfernung?



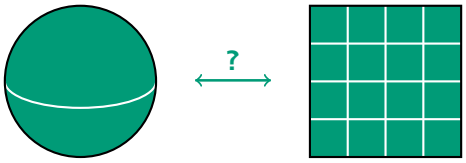
Modell zur gegenseitigen Lage von Erde (zu zwei Zeitpunkten im Verlauf eines Jahres), Sonne und (einem beliebigen) Stern
Quelle:
http://weltderfertigung.de/downloads/winkelfunktionen_ohne_muehe_verstehen.pdf

3) GPS

Wie viele Satelliten benötigt man in unserer dreidimensionalen Welt (inklusive Korrektur des Uhrenfehlers), um die Position eines Objektes (auf der Erdoberfläche bzw. im erdnahen Raum) zu bestimmen?
Überlege dazu, wie der Schnitt von n (n = 2, 3, 4…) Kugeloberflächen aussieht!

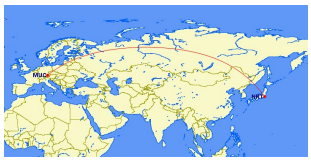
1 Was verraten Winkel in Dreiecken über die Welt?

Gibt es Landkarten von (Gebieten auf) sphärischen Planeten, die längentreu oder flächen- und winkeltreu sind?



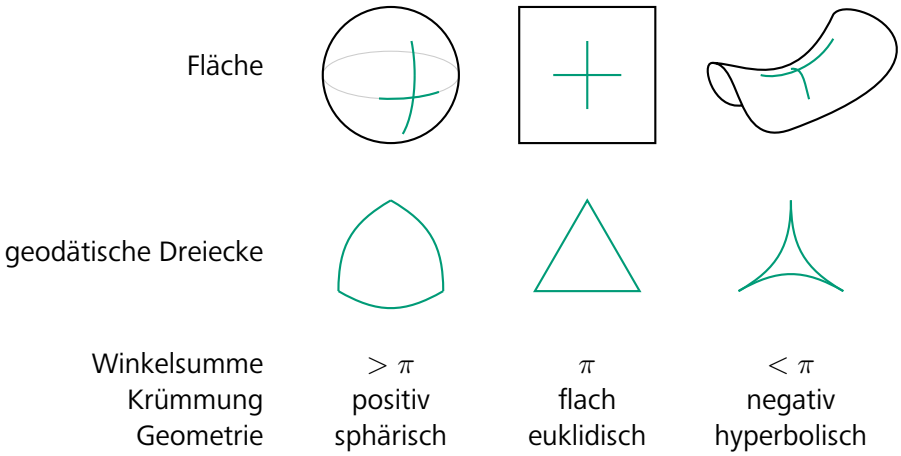
Dies ist nicht möglich, denn:

- Solche Landkarten ändern die Winkelsumme in geodätischen Dreiecken nicht,
- aber die Winkelsumme sphärischer Dreiecke ist größer als π.

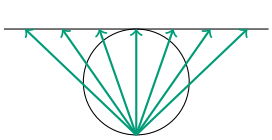


[http://www.gcmap.com/]

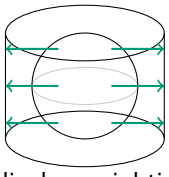
Zur Erklärung: Eine Geodäte ist ein (lokal) längenminimierender Weg; auf der Sphäre sind Geodäten durch Segmente von Großkreisen gegeben und in der Ebene sind Geodäten durch Strecken gegeben. Ein geodätisches Dreieck besteht aus drei Punkten, die durch Geodäten verbunden sind.



Es gibt jedoch diverse Verfahren für Karten auf sphärischen Planeten, die winkel- oder flächentreu sind. Z.B. ist die Zylinderprojektion flächentreu und stereographische Projektion und die Mercatorprojektion sind winkeltreu.



stereographische Projektion



Zylinderprojektion

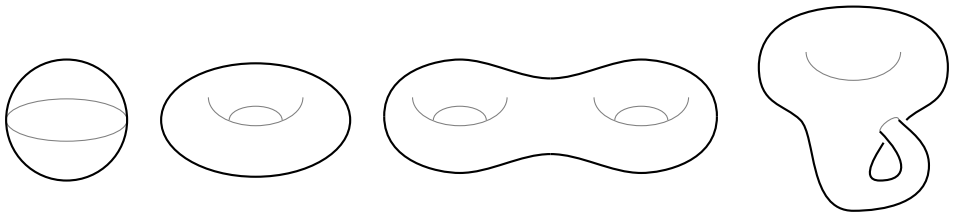
Weiterführende Links

http://de.wikipedia.org/wiki/Kartennetzentwurf

Workshop „Triangulierungen und Kartographie“, 30. Oktober 2015
Clara Löh, Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg
http://www.mathematik.uni-r.de/loeh, clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de

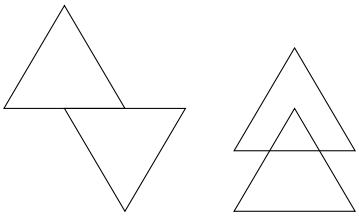
2 Was verrät die Anzahl von Dreiecken über die Welt?

Wie kann man auf einer Fläche entscheiden, welche globale Gestalt die Fläche hat (wenn man sich nur „in“ der Fläche bewegen kann und die Fläche nicht „von außen“ betrachten kann)?



Eine Möglichkeit, ist die Euler-Charakteristik:

- Wir bestimmen eine Triangulierung T der gegebenen Fläche F, d.h. wir zerlegen die Fläche so in endlich viele Dreiecke, dass die Dreiecke gut zusammenpassen,



nicht erlaubt nicht erlaubt

- und bestimmen dann die Euler-Charakteristik, d.h.

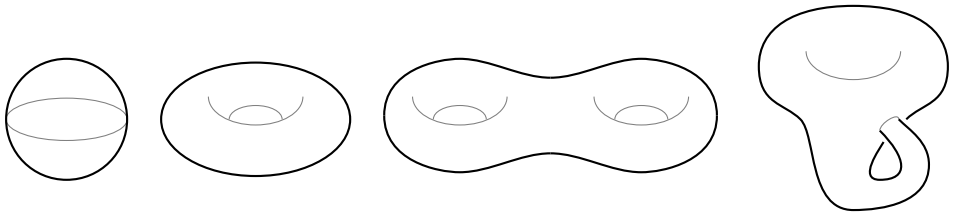
$$\chi(F, T) := \text{Anzahl der Ecken} - \text{Anzahl der Kanten} + \text{Anzahl der Dreiecke}.$$

Zum Beispiel ist

$$\chi(\text{Sphäre, Tetraeder}) = 4 - 6 + 4 = 2,$$
$$\chi(\text{Sphäre, Oktaeder}) = 2,$$
$$\chi(\text{Sphäre, Ikosaeder}) = 2.$$

Satz (topologische Invarianz der Euler-Charakteristik). Die Euler-Charakteristik hängt nicht von der gewählten Triangulierung der Fläche ab.

Mithilfe geeigneter Triangulierungen erhält man für Flächen zum Beispiel die folgenden Werte für die Euler-Charakteristik:



2 Aufgabe 4 -2 0

Nimmt man noch die sogenannte Orientierbarkeit von Flächen hinzu, so kann man Flächen tatsächlich mithilfe der Euler-Charakteristik vollständig klassifizieren.

Der Satz von Gauß-Bonnet gibt außerdem einen Zusammenhang zwischen der Krümmung und der Euler-Charakteristik von Flächen.

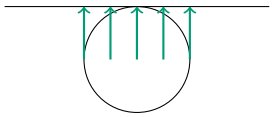
Weiterführende Links

http://en.wikipedia.org/wiki/Euler_characteristic

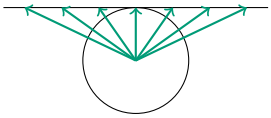
Aufgabe 4. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. Alle geodätischen Dreiecke auf einem sphärischen Planeten haben dieselbe Winkelsumme. wahr ☐ falsch ☐

2. Auf sphärischen Planeten gibt es gleichseitige geodätische Dreiecke. wahr ☐ falsch ☐



orthographische Projektion



Zentralprojektion

Aufgabe 5. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. Die orthographische Projektion ist flächentreu. wahr ☐ falsch ☐

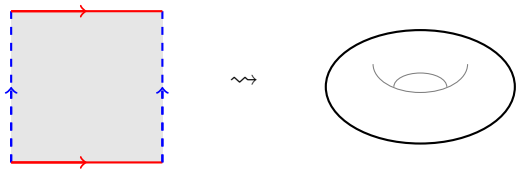
2. Die Zentralprojektion bildet Geodäten auf Geodäten ab. wahr ☐ falsch ☐

Aufgabe 6.

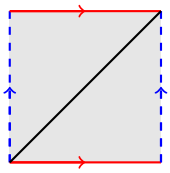
1. Berechne durch Abzählen χ(Sphäre, Oktaeder).

2. Berechne durch Abzählen χ(Sphäre, Ikosaeder).

Aufgabe 7. Den Torus erhält man durch die folgende Verklebung eines Quadrats:



1. Bestimme mithilfe der Triangulierung



die Euler-Charakteristik des Torus.

2. Ein Roboter landet auf einem fernen Planeten, fährt die gesamte Oberfläche ab und erstellt dabei eine Triangulierung des Planeten. Als Euler-Charakteristik erhält er das Ergebnis -4. Was kann man über den Planeten sagen?

Stefan Krauss, Clara Löh, Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg
http://www.uni-regensburg.de/mathematik/didaktik-mathematik, stefan1.krauss@mathematik.uni-regensburg.de
http://www.mathematik.uni-r.de/loeh, clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de