Projektive ebene Kurven – Der Satz von Bezout und lineare Systeme

Clara Strohm (strohm@math.uni-muenster.de)

19. Juni 2002

Wir wollen nun Kurven in der projektiven Ebene etwas genauer studieren. Insbesondere führen wir Begriffe wie Vielfachheit und Schnittzahlen auch für projektive ebene Kurven ein. Den Zusammenhang zwischen Schnittzahlen und den Graden entsprechender Formen klärt der Satz von Bezout. Ausserdem werden wir uns mit linearen Systemen beschäftigen, d.h. wir werden untersuchen, "wie viele" Kurven mit vorgegebenen Grad und Vielfachheiten existieren.

1 Vorbereitungen

Im folgenden bezeichnen wir mit k stets einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Definition. Wir nennen zwei nichtkonstante Formen $F, G \in k[X, Y, Z]$ **äquivalent**, wenn es ein $\lambda \in k \setminus \{0\}$ gibt mit $G = \lambda \cdot F$. Die dadurch definierten Äquivalenzklassen nennen wir **projektive ebene Kurven**. Der **Grad** einer solchen Kurve ist der Grad einer definierenden Form.

1.1 Dehomogenisierung

Wir führen eine etwas allgemeinere Form der Dehomogenisierung ein: Sei F eine ebene projektive Kurve vom Grad d und L eine projektive Gerade (d.h. eine projektive ebene Kurve vom Grad 1). Dann setzen wir

$$F_{*L} := \frac{F}{L^d} \in k(\mathbf{P}^2).$$

Ist L' eine weitere projektive Gerade und $P \notin L \cap L'$, so ist L/L' in $\mathcal{O}_P\left(\mathbf{P}^2\right)$ eine Einheit, d.h.

$$\begin{aligned} F_{*L'} \cdot \mathcal{O}_P\left(\mathbf{P}^2\right) &= \frac{F}{L'^d} \cdot \mathcal{O}_P\left(\mathbf{P}^2\right) \\ &= \left(\frac{L}{L'}\right)^d \cdot F_{*L} \cdot \mathcal{O}_P\left(\mathbf{P}^2\right) \\ &= F_{*L} \cdot \mathcal{O}_P\left(\mathbf{P}^2\right). \end{aligned}$$

Dabei können wir immer einen projektiven Koordinatenwechsel finden, der L auf die Gerade $Z = 0$ abbildet. Unter der natürlichen Identifikation von $k(\mathbf{A}^2)$ mit $k(\mathbf{P}^2)$

$$\begin{aligned} k(\mathbf{P}^2) &\longrightarrow k(\mathbf{A}^2) \\ \left[\frac{f}{g}\right] &\longmapsto \left[\frac{f(X,Y,1)}{g(X,Y,1)}\right] \end{aligned}$$

stimmen dann F_{*Z} und $F(X,Y,1)$ überein.

Lemma 1. *Ist $P = [x : y : 1]$ und F eine irreduzible ebene projektive Kurve, so gibt es einen kanonischen Isomorphismus*

$$\mathcal{O}_P\left(F\right) \cong \mathcal{O}_{(x,y)}\left(F_{*Z}\right).$$

Beweis. Da F irreduzibel ist, ist

$$\mathcal{O}_P\left(F\right) = \left\{ \left[\frac{g}{h}\right] \;\middle|\; g, h \in k[X,Y,Z]/(F) \text{ Formen vom selben Grad und } h(P) \neq 0 \right\}$$

und

$$\mathcal{O}_{(x,y)}\left(F_{*Z}\right) = \left\{ \left[\frac{g}{h}\right] \;\middle|\; g, h \in k[X,Y]/(F_{*Z}) \text{ und } h(P) \neq 0 \right\}.$$

Nachrechnen zeigt dann (unter Verwendung von [Fu, Kapitel 2, Proposition 5] und der Irreduzibilität von F), dass der gesuchte Isomorphismus durch

$$\left[\frac{g}{h}\right] \longmapsto \left[\frac{g_{*Z}}{h_{*Z}}\right]$$

gegeben ist. □

1.2 Vielfachheiten

In diesem Abschnitt definieren wir Vielfachheiten für ebene projektive Kurven: Für $j \in \{1,2,3\}$ sei

$$U_j := \{[x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbf{P}^2 \mid x_j = 1\}.$$

Ist $P = [x_1 : x_2 : x_3]$ mit $x_j = 1$, so schreiben wir

$$\begin{aligned} P_{*X_1} &:= (x_2, x_3) \text{ falls } j = 1, \\ P_{*X_2} &:= (x_1, x_3) \text{ falls } j = 2, \\ P_{*X_3} &:= (x_1, x_2) \text{ falls } j = 3. \end{aligned}$$

Definition. Sei F eine projektive ebene Kurve und $P \in U_j$ für ein $j \in \{1,2,3\}$. Dann heisst

$$m_P(F) := m_{P_{*X_j}}\left(F_{*X_j}\right)$$

Vielfachheit von F in P.

Lemma 2. *Dies ist wohldefiniert. D.h. ist auch $P \in U_i$, so ist*

$$m_{P_{*X_j}}\left(F_{*X_j}\right) = m_{P_{*X_i}}\left(F_{*X_i}\right).$$

Beweis. Sind F und G zwei projektive ebene Kurven, so ist

$$\begin{aligned} m_{P_{*X_j}}\left((FG)_{*X_j}\right) &= m_{P_{*X_j}}\left(F_{*X_j} \cdot G_{*X_j}\right) \\ &= m_{P_{*X_j}}\left(F_{*X_j}\right) + m_{P_{*X_j}}\left(G_{*X_j}\right), \end{aligned}$$

d.h. es genügt die Behauptung für irreduzible Kurven nachzuweisen. Sei also F irreduzibel. Mit Lemma 1 erhalten wir

$$\mathcal{O}_{P_{*X_j}}\left(F_{*X_j}\right) \cong \mathcal{O}_P(F) \cong \mathcal{O}_{P_{*X_i}}\left(F_{*X_i}\right).$$

Nach [Fu, Kapitel 3, Satz 2] hängt die Vielfachheit nur vom entsprechenden lokalen Ring ab, d.h. es folgt

$$m_{P_{*X_j}}\left(F_{*X_j}\right) = m_{P_{*X_i}}\left(F_{*X_i}\right).$$

□

1.3 Ordnung

Sei P ein einfacher Punkt der irreduziblen Kurve F (d.h. $m_P(F) = 1$). Dann ist $\mathcal{O}_P(F)$ ein diskreter Bewertungsring. Sei ord_P^F die entsprechende Ordnungsfunktion auf $k(F)$. Sei L eine Gerade, die nicht durch P geht, und $G \in k[X,Y,Z]$ eine Form. Sei weiter $[G_{*L}]$ die Restklasse von G_{*L} in $\mathcal{O}_P(F)$. Dann setzen wir

$$\mathrm{ord}_P^F(G) := \mathrm{ord}_P^F([G_{*L}]).$$

Dabei ist klar, dass dies unabhängig von der Wahl von L ist.

2 Schnittzahlen von projektiven ebenen Kurven

Seien F und G ebene projektive Kurven und $P \in \mathbf{P}^2$. Wir wollen nun ebenso wie für die affinen ebenen algebraischen Kurven eine Schnittzahl definieren.

Definition. Sei L eine Gerade, die nicht durch P geht. Dann heisst

$$I(P, F \cap G) := \dim_k \mathcal{O}_P\left(\mathbf{P}^2\right)/(F_{*L}, G_{*L})$$

die **Schnittzahl von** F **und** G **in** P.

Lemma 3. *Die Schnittzahl ist dabei unabhängig von der Wahl der Geraden L.*

Beweis. Ist L' eine weitere projektive Gerade, die nicht durch P geht, so ist

$$\begin{aligned}(F_{*L}, G_{*L}) \cdot \mathcal{O}_P\left(\mathbf{P}^2\right) &= F_{*L} \cdot \mathcal{O}_P\left(\mathbf{P}^2\right) + G_{*L} \cdot \mathcal{O}_P\left(\mathbf{P}^2\right) \\ &= F_{*L'} \cdot \mathcal{O}_P\left(\mathbf{P}^2\right) + G_{*L'} \cdot \mathcal{O}_P\left(\mathbf{P}^2\right) \\ &= (F_{*L'}, G_{*L'}) \cdot \mathcal{O}_P\left(\mathbf{P}^2\right),\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Unter der Verwendung von Schnittzahlen und Vielfachheiten können wir "rückwärts" definieren, was Tangenten sind:

Definition. Eine Gerade L heisst **Tangente der ebenen projektiven Kurve** F in P, wenn $I(P, F \cap L) > m_P(F)$ ist.

Satz. *Die Schnittzahl ebener projektiver Kurven besitzt die folgenden Eigenschaften ① - ⑧.*

① Falls sich F und G eigentlich in P schneiden, ist

$$I(P, F \cap G) \in \mathbf{N}_{\geq 0}.$$

Schneiden sich F und G nicht eigentlich in P (d.h. besitzen sie eine gemeinsame Komponente, die durch P geht), so ist

$$I(P, F \cap G) = \infty.$$

② Es ist

$$I(P, F \cap G) = 0 \iff P \notin F \cap G,$$

und die Schnittzahl hängt nur von den Komponenten von F und G ab, die durch P gehen.

③ Ist T ein projektiver Koordinatenwechsel auf $\mathbf{P}^2$ und $T(Q) = P$, so ist

$$I(Q, F \circ T \cap G \circ T) = I(P, F \cap G).$$

④ (Symmetrie) Es ist

$$I(P, F \cap G) = I(P, G \cap F).$$

⑤ Es ist

$$I(P, F \cap G) \geq m_P(F) \cdot m_P(G),$$

wobei genau dann Gleichheit vorliegt, wenn F und G keine gemeinsamen Tangenten in P besitzen.

⑥ (Additivität) Es ist

$$I(P, F \cap G \cdot H) = I(P, F \cap G) + I(P, F \cap H).$$

⑦ Für alle Formen $S \in k[X, Y]$ mit $\deg S = \deg G - \deg F$ ist

$$I(P, F \cap G) = I(P, F \cap (G + SF)).$$

⑧ Ist P ein einfacher Punkt von F, so ist

$$I(P, F \cap G) = \mathrm{ord}_P^F(G).$$

Beweis. Seien F und G ebene projektive Kurven, $P \in \mathbf{P}^2$ und L eine projektive Gerade, die nicht durch P geht. Sei oBdA $P \in U_3$. Dann ist Z/L eine Einheit in $\mathcal{O}_P\left(\mathbf{P}^2\right)$, d.h.

$$F_{*L} \cdot \mathcal{O}_P\left(\mathbf{P}^2\right) = F_{*Z} \cdot \mathcal{O}_P\left(\mathbf{P}^2\right)$$

(und analog für G). Insbesondere ist dann

$$\begin{aligned} I\left(P, F \cap G\right) &= \dim_k \mathcal{O}_P\left(\mathbf{P}^2\right)/(F_{*L}, G_{*L}) \\ &= \dim_k \mathcal{O}_P\left(\mathbf{P}^2\right)/(F_{*Z}, G_{*Z}) \\ &= \dim_k \mathcal{O}_{P_{*Z}}\left(\mathbf{A}^2\right)/(F_{*Z}, G_{*Z}) \\ &= I\left(P_{*Z}, F_{*Z} \cap G_{*Z}\right), \end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile die Schnittzahl von affinen ebenen Kurven gemeint ist.
Dann folgen ① - ⑧ direkt aus den Eigenschaften ① - ⑧ für Schnittzahlen affiner ebener Kurven (siehe [SAK]). □

3 Der Satz von Bezout

Die projektive Ebene $\mathbf{P}^2$ ist gerade so konstruiert, dass sich je zwei verschiedene Geraden in genau einem Punkt schneiden. Es gilt jedoch noch weit mehr:

Satz (Satz von Bezout). *Seien F und G projektive ebene Kurven vom Grad m bzw. n, die keine gemeinsame Komponente besitzen. Dann ist*

$$\sum_{P \in \mathbf{P}^2} I\left(P, F \cap G\right) = m \cdot n.$$

Lemma 4. *Seien F und G wie im Satz. Dann ist $F \cap G$ endlich.*

Beweis. Wir betrachten die Zerlegung

$$\begin{aligned} F \cap G &= (F \cap G \cap U_1) \cup (F \cap G \cap U_2) \cup (F \cap G \cap U_3) \\ &= \left\{P \in \mathbf{P}^2 \mid P_{*X} \in F_{*X} \cap G_{*X}\right\} \\ &\cup \left\{P \in \mathbf{P}^2 \mid P_{*Y} \in F_{*Y} \cap G_{*Y}\right\} \\ &\cup \left\{P \in \mathbf{P}^2 \mid P_{*Z} \in F_{*Z} \cap G_{*Z}\right\}. \end{aligned}$$

Angenommen, F_{*X} und G_{*X} haben eine gemeinsame Komponente $H \in k[Y, Z] \setminus k$, etwa $F_{*X} = H\tilde{F}$ und $G_{*X} = H\tilde{G}$. Also existieren $r, s \in \mathbf{N}_{\geq 0}$ mit

$$\begin{aligned} F &= X^r (F_{*X})^{*X} = X^r H^{*X} \tilde{F}^{*X} \\ G &= X^s H^{*X} \tilde{G}^{*X}. \end{aligned}$$

Da H nicht konstant ist, ist auch H^{*X} nicht konstant, im Widerspruch dazu, dass F und G keine gemeinsame Komponente besitzen.

Also haben F_{*X} und G_{*X} keine gemeinsame Komponente, d.h. $F_{*X} \cap G_{*X} \subset \mathbf{A}^2$ ist endlich (siehe [SAK]). Damit ist auch

$$F \cap G \cap U_1 = \{P \in \mathbf{P}^2 \mid P_{*X} \in F_{*X} \cap G_{*X}\}$$

endlich. Analog folgt, dass $F \cap G \cap U_2$ und $F \cap G \cap U_3$ endlich sind. □

Beweis. (Des Satzes) Nach obigem Lemma können wir annehmen, dass keiner der Punkte aus $F \cap G$ auf der Geraden $Z = 0$ liegt (ansonsten wenden wir einen projektiven Koordinatenwechsel an – nach dem Korollar zu Lemma 11 gibt es eine projektive Gerade, die keinen der Punkte aus $F \cap G$ enthält).
Also ist für alle (nach Eigenschaft ② und der Definition der Schnittzahlen)

$$\begin{aligned}\sum_{P \in \mathbf{P}^2} I\left(P, F \cap G\right) &= \sum_{P \in F \cap G} I\left(P, F \cap G\right)\\ &= \sum_{P \in F \cap G} I\left(P_{*Z}, F_{*Z} \cap G_{*Z}\right),\end{aligned}$$

d.h. mit der Eigenschaft ⑨ für Schnittzahlen von ebenen affinen Kurven erhalten wir

$$\sum_{P \in \mathbf{P}^2} I\left(P, F \cap G\right) = \dim_k k[X,Y]/(F_{*Z}, G_{*Z}).$$

Wir setzen nun (zu $d \in \mathbf{N}$)

$$\begin{aligned}\Gamma_{*Z} &:= k[X,Y]/(F_{*Z}, G_{*Z})\\ \Gamma &:= k[X,Y,Z]/(F,G)\\ R &:= k[X,Y,Z]\\ \Gamma_d &:= \{F \in \Gamma \mid F \text{ ist eine Form vom Grad } d\}\\ R_d &:= \{F \in R \mid F \text{ ist eine Form vom Grad } d\}.\end{aligned}$$

Es genügt also zu zeigen, dass es ein $d \in \mathbf{N}$ gibt mit

$$\dim_k \Gamma_{*Z} = \dim_k \Gamma_d = m \cdot n.$$

Dies erhalten wir aus den folgenden drei Lemmata. □

Lemma 5. *Für alle $d \in \mathbf{N}_{\geq m+n}$ ist*

$$\dim_k \Gamma_d = m \cdot n.$$

Beweis. Sei $\pi \colon R \longrightarrow \Gamma$ die kanonische Abbildung und

$$\begin{aligned}\varphi \colon R \times R &\longrightarrow R\\ (A,B) &\longmapsto AF + BG,\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \psi\colon R &\longrightarrow R \times R \\ C &\longmapsto (CG, -FC). \end{aligned}$$

Da F und G keine gemeinsamen Komponenten besitzen, haben sie auch keinen gemeinsamen Teiler, d.h. die Sequenz

$$0 \longrightarrow R \xhookrightarrow{\psi} R \times R \xrightarrow{\varphi} R \xrightarrow{\pi} \Gamma \longrightarrow 0$$

von k-Vektorräumen ist exakt. Sei nun $d \in \mathbf{N}_{\geq m+n}$. Durch Einschränkung auf die Formen von entsprechendem Grad erhalten wir dann die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow R_{d-m-n} \xhookrightarrow{\psi} R_{d-m} \times R_{d-n} \xrightarrow{\varphi} R_d \xrightarrow{\pi} \Gamma_d \longrightarrow 0$$

von k-Vektorräumen. Wegen

$$\forall_{\ell \in \mathbf{N}} \quad \dim_k R_\ell = \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2}$$

folgt daraus

$$\begin{aligned} \dim_k \Gamma_d &= \dim_k R_{d-m-n} - \dim_k R_{d-m} - \dim_k R_{d-n} + \dim_k R_d \\ &= m \cdot n. \end{aligned}$$

□

Lemma 6. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \alpha\colon \Gamma &\longrightarrow \Gamma \\ [H] &\mapsto [ZH] \end{aligned}$$

ist injektiv.

Beweis. Dass α wohldefiniert ist, ist klar. Sei also $H \in k[X,Y,Z]$ und

$$ZH = AF + BG$$

mit $A, B \in k[X,Y,Z]$. Sei $F_0 := F(X,Y,0)$ und $G_0 := G(X,Y,0)$. Die Formen F_0 und G_0 haben in $k[X,Y]$ keinen gemeinsamen Teiler, denn:
Angenommen, F_0 und G_0 besitzen einen gemeinsamen Teiler in $k[X,Y] \setminus k$. Dann haben F_0 und G_0 in $\mathbf{A}^2$ eine gemeinsame Nullstelle, d.h. F und G haben eine gemeinsame Nullstelle auf der Geraden $Z = 0$, was nicht sein kann. Also haben F_0 und G_0 keinen gemeinsamen Teiler in $k[X,Y]$.
Wegen $ZH = AF + BG$ folgt

$$0 = A_0 F_0 + B_0 G_0,$$

und damit $B_0 = F_0 C$ und $A_0 = -G_0 C$ für ein gewisses $C \in k[X,Y]$. Wir setzen

$$\begin{aligned} A_1 &:= A + CG \\ B_1 &:= B - CF. \end{aligned}$$

Wegen $(A_1)_0 = 0 = (B_1)_0$ folgt

$$\begin{aligned} A_1 &= ZA' \\ B_1 &= ZB' \end{aligned}$$

für gewisse $A', B' \in k[X,Y,Z]$. Also ist

$$\begin{aligned} A_1F + B_1G &= (A + CG)F + (B - CF)G \\ &= AF + CGF + BG - CFG \\ &= AF + BG \\ &= ZH, \end{aligned}$$

und damit $H = A'F + B'G$, woraus die Injektivität folgt. $\square$

Lemma 7. *Für alle $d \in \mathbf{N}_{\geq m+n}$ ist*

$$\dim_k \Gamma_{*Z} = \dim_k \Gamma_d.$$

Beweis. Sei $d \in \mathbf{N}_{\geq m+n}$. Nach Lemma 5 gibt es Formen $A_1, \ldots, A_{mn} \in R_d$, so dass die $\pi(A_1), \ldots, \pi(A_{mn})$ eine Basis von Γ_d sind. Wir setzen nun

$$\forall_{j \in \{1,\ldots,mn\}} \quad a_j := [(A_i)_{*Z}] \in \Gamma_{*Z},$$

und zeigen, dass $(a_1, \ldots, a_{mn})$ eine Basis von Γ_{*Z} ist: Nach Lemma 6 ist die Einschränkung

$$\alpha|_{\Gamma_d} \colon \Gamma_d \longrightarrow \Gamma_{d+1}$$

injektiv, und nach Lemma 5 ist

$$\dim_k \Gamma_d = m \cdot n = \dim_k \Gamma_{d+1}.$$

Also ist der k-Vektorraumhomomorphismus $\alpha|_{\Gamma_d}$ sogar ein Isomorphismus. Daher bilden $\pi(Z^r A_1), \ldots, \pi(Z^r A_{mn})$ für alle $r \in \mathbf{N}$ eine Basis von Γ_{d+r}.
Die $a_1, \ldots a_{mn}$ erzeugen Γ_{*Z}, denn: Sei $h \in \Gamma_{*Z}$, d.h. es existiert ein $H \in k[X,Y]$ mit $h = [H]$. Dazu gibt es $N, r \in \mathbf{N}$, so dass $Z^N H^{*Z}$ eine Form vom Grad $d + r$ ist. Also existieren $\lambda_1, \ldots \lambda_{mn} \in k$ und $B, C \in k[X,Y]$ mit

$$Z^N H^{*Z} = \sum_{j=1}^{mn} \lambda_j Z^r A_j + BF + CG.$$

Daraus folgt

$$H = (Z^N H^{*Z})_{*Z} = \sum_{j=1}^{mn} \lambda_j (A_j)_{*Z} + B_{*Z} F_{*Z} + C_{*Z} G_{*Z},$$

und damit $h = \sum_{j=1}^{mn} \lambda_j a_j$. Also wird Γ_{*Z} von $a_1, \ldots, a_{mn}$ erzeugt.

Die $a_1, \ldots, a_{mn}$ sind linear unabhängig über k, denn: Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_{mn} \in k$ gegeben, mit $\sum_{j=1}^{mn} \lambda_j a_j = 0$, d.h. (für gewisse $B, C \in k[X, Y, Z]$)

$$\sum_{j=1}^{mn} \lambda_j (A_j)_{*Z} = BF_{*Z} + CG_{*Z}.$$

Nach [Fu, Kapitel 2, Proposition 5] gibt es dann $r, s, t \in \mathbf{N}$ mit

$$Z^r \sum_{j=1}^{mn} \lambda_j A_j = Z^s B^{*Z} F + Z^t C^{*Z} G.$$

Dann ist aber (in Γ_{d+r})

$$\sum_{j=1}^{mn} \lambda_j \pi(Z^r A_j) = 0.$$

Da die $\pi(Z^r A_1), \ldots, \pi(Z^r A_{mn})$ eine Basis von Γ_{d+r} bilden, sind diese insbesondere linear unabhängig, und damit

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{mn} = 0.$$ □

4 Folgerungen aus dem Satz von Bezout

Korollar. *Haben die ebenen projektiven Kurven F und G keine gemeinsamen Komponenten, so ist*

$$\sum_{P \in \mathbf{P}^2} m_P(F)\, m_P(G) \leq \deg F \cdot \deg G.$$

Beweis. Nach ⑤ ist

$$\forall_{P \in \mathbf{P}^2} \quad I(P, F \cap G) \geq m_P(F) \cdot m_P(G),$$

woraus mit dem Satz von Bezout

$$\begin{aligned} \sum_{P \in \mathbf{P}^2} m_P(F)\, m_P(G) &\leq \sum_{P \in \mathbf{P}^2} I(P, F \cap G) \\ &= \deg F \cdot \deg G \end{aligned}$$

folgt. □

Korollar. *Haben die ebenen projektiven Kurven F und G keine gemeinsamen Komponenten und schneiden sie sich in $\deg F \cdot \deg G$ verschiedenen Punkten, so sind diese einfache Punkte von F und G.*

Beweis. Ist $P \in F \cap G$, so ist

$$m_P(F) \geq 1 \text{ und } m_P(G) \geq 1.$$

Also erhalten wir – zusammen mit obigem Korollar –

$$\begin{aligned} m_P(F)\, m_P(G) \leq \sum_{P \in F \cap G} m_P(F)\, m_P(G) \qquad & \leq \sum_{P \in \mathbf{P}^2} m_P(F)\, m_P(G) \\ & \leq \deg F \deg G, \end{aligned}$$

und damit

$$\forall_{P \in F \cap G} \quad m_P(F) = 1 = m_P(G)\,. \qquad \square$$

Korollar. *Haben zwei ebene projektive Kurven vom Grad m bzw. n mehr als $m \cdot n$ gemeinsame Punkte, so besitzen sie bereits eine gemeinsame Komponente.*

Beweis. Angenommen, die ebenen projektiven Kurven F und G besitzen keine gemeinsame Komponente und haben mehr als $\deg F \cdot \deg G$ gemeinsame Punkte. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{P \in \mathbf{P}^2} I(P, F \cap G) = & \sum_{P \in F \cap G} I(P, F \cap G) \\ & > \deg F \cdot \deg G, \end{aligned}$$

im Widerspruch zum Satz von Bezout. Also haben F und G eine gemeinsame Komponente. $\square$

5 Lineare Systeme von algebraischen Kurven

Gelegentlich wollen wir alle projektiven ebenen Kurven von einem bestimmten Grad $d \geq 1$ betrachten.

Lemma 8. *Es gibt eine Bijektion*

$$\{F \in k[X, Y, Z] \mid F \textit{ ist eine projektive ebene Kurve vom Grad } d\} \longrightarrow \mathbf{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}.$$

Beweis. Sei $M_1, \ldots, M_N$ eine Aufzählung der Monome in X, Y, Z vom Grad d, d.h.

$$\begin{aligned} N &= \sum_{j=0}^{d} (j+1) \\ &= \frac{(d+1)(d+2)}{2}. \end{aligned}$$

Eine ebene projektive Kurve vom Grad d entspricht gerade der Wahl von Koeffizienten $a_1, \ldots, a_N$ für die Darstellung in $M_1, \ldots, M_N$. Dabei ist allerdings zu beachten, dass nicht alle a_j verschwinden dürfen und dass für jedes $\lambda \in k \setminus \{0\}$ durch $a_1, \ldots, a_N$ und $\lambda a_1, \ldots, \lambda a_N$ dieselbe Kurve definiert wird. Dies liefert mit der Konstruktion von $\mathbf{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$ wegen $N - 1 = \frac{d(d+3)}{2}$ genau die Behauptung. $\square$

Beispiel. Jede projektive Gerade $aX + bY + cZ$ entspricht dem Punkt $[a : b : c] \in \mathbf{P}^2$. Dabei gilt sogar, dass die Geraden in $\mathbf{P}^2$ einen ganzen $\mathbf{P}^2$ bilden.

Wenn wir nun weitere Voraussetzungen an die projektiven Kurven vom Grad d stellen, so bilden die Kurven, die diesen Bedingungen genügen, eine Teilmenge von $\mathbf{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$.

Definition. Sei M eine Menge von projektiven ebenen Kurven vom Grad d, so dass die entsprechende Teilmenge von $\mathbf{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$ eine lineare Subvarietät ist. Dann heisst M ein **lineares System ebener projektiver Kurven**.

Dabei ist eine lineare Subvarietät eine projektive Varietät, die von Formen von Grad 1 erzeugt wird.

Definition. Sei $V \subset \mathbf{P}^n$ eine lineare Untervarietät. Dann heisst

$$-1 + \dim_k \{0\} \cup \{x \in \mathbf{A}^{n+1} \mid [x] \in V\}$$

Dimension von V.

Lemma 9. *(1) Sei $P \in \mathbf{P}^2$. Dann bilden die projektiven ebenen Kurven vom Grad d, die P enthalten eine Hyperebene in $\mathbf{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$.*
(2) Ist $T\colon \mathbf{P}^2 \longrightarrow \mathbf{P}^2$ ein projektiver Koordinatenwechsel, so induziert

$$\begin{aligned} \{F \mid F \textit{ ist eine Kurve vom Grad } d\} &\longrightarrow \{F \mid F \textit{ ist eine Kurve vom Grad } d\} \\ F &\longmapsto F \circ T \end{aligned}$$

einen projektiven Koordinatenwechsel auf $\mathbf{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$.

Beweis. 1. Sei $P = [x : y : z]$. Die projektive Kurve, die durch $[a_1 : \cdots : a_N] \in \mathbf{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$ gegeben ist, geht genau dann durch P, wenn $\sum_{j=1}^N a_j M_j(x,y,z) = 0$ ist. Da nicht alle $M_j(x,y,z)$ verschwinden können, folgt, dass die $[a_1 : \cdots : a_N]$ eine Hyperebene definieren.
2. Analog folgt, dass $\circ T$ eine lineare Abbildung $\mathbf{A}^N \longrightarrow \mathbf{A}^N$ induziert. Das entsprechende Inverse ist durch $\circ T^{-1}$ gegeben, woraus die Behauptung folgt. □

Korollar. *Insbesondere bilden alle projektiven ebenen Kurven vom Grad d, die eine gegebene Menge von Punkten aus $\mathbf{P}^2$ enthalten, eine lineare Subvarietät von $\mathbf{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$.* □

Korollar. *Seien $d(d+3)/2$ Punkte in $\mathbf{P}^2$ gegeben. Dann gibt es eine projektive Kurve vom Grad d, die all diese Punkte enthält.*

Beweis. Sei $n := d(d+3)/2$. Nach dem Lemma genügt es zu zeigen, dass der Schnitt von n Hyperebenen in $\mathbf{P}^n$ nicht leer ist: Jede Hyperebene in $\mathbf{P}^n$ entspricht einer Hyperebene in $\mathbf{A}^{n+1}$. Seien die entsprechenden n Hyperebenen in $\mathbf{A}^{n+1}$ gegeben durch die Vektoren $h_1, \ldots, h_n \in \mathbf{A}^{n+1} \setminus \{0\}$. Also ist der Rang der Matrix $(h_1|\ldots|h_n)$ höchstens n. Insbesondere gibt es daher ein $x \in \mathbf{A}^{n+1} \setminus \{0\}$ mit

$$\forall_{j \in \{1,\ldots,n\}} \quad x \cdot h_j = 0,$$

d.h. x liegt im Schnitt der Hyperebenen in $\mathbf{A}^{n+1}$. Wegen $x \neq 0$ liegt $[x]$ im Schnitt der Hyperebenen in $\mathbf{P}^n$. Also ist der Schnitt der n Hyperebenen in $\mathbf{P}^n$ nicht leer. □

Wir wollen nun untersuchen, "wie viele" Kurven von gegebenem Grad existieren, für die wir ausserdem das Verhalten – also die Vielfachheiten – in einzelnen Punkten vorgeben.

Definition. Seien $d, r_1, \ldots, r_n \in \mathbf{N}_{\geq 0}$ und $P_1, \ldots, P_n \in \mathbf{P}^2$. Dann bezeichnen wir mit $V(d; r_1P_1, \ldots r_nP_n)$ die Menge aller ebenen projektiven Kurven F vom Grad d, so dass

$$\forall_{j \in \{1,\ldots,n\}} \quad m_{P_j}(F) \geq r_j.$$

Satz. *(1) Die Menge $V(d; r_1P_1, \ldots r_nP_n)$ entspricht einer linearen Untervarietät von $\mathbf{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$, deren Dimension mindestens*

$$\frac{d(d+3)}{2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{r_j(r_j+1)}{2}$$

ist.
(2) Ist $d \geq -1 + \sum_{j=1}^{n} r_j$, so ist

$$\dim V(d; r_1P_1, \ldots r_nP_n) = \frac{d(d+3)}{2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{r_j(r_j+1)}{2}.$$

Beweis. 1. Wir zeigen zunächst den folgenden Spezialfall:

Lemma 10. *Sei $d \geq -1 + r$ und $P \in \mathbf{P}^2$. Dann ist $V(d; rP)$ eine lineare Untervarietät von $\mathbf{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$ der Dimension $\frac{d(d+3)}{2} - \frac{r(r+1)}{2}$.*

Beweis. Offensichtlich bleibt die Dimension von linearen Untervarietäten unter projektiven Koordinatenwechseln invariant, d.h. wir können nach Lemma 9, Teil 2 oBdA annehmen, dass $P = [0:0:1]$ ist. Sei $F \in k[X,Y,Z]$ eine Form vom Grad d. Wir schreiben

$$F = \sum_{j=0}^{d} F_j Z^{d-j}$$

mit Formen $F_j \in k[X,Y]$ vom Grad j. Dann ist

$$m_P(F) = m_{P_{*Z}}(F_{*Z}) = m_{(0,0)}\left(\sum_{j=0}^{d} F_j\right),$$

d.h.

$$r \leq m_P(F) \iff F_0 = \cdots = F_{r-1} = 0.$$

Dabei ist $F_0 = \cdots = F_{r-1} = 0$ genau dann, wenn die Koeffizienten der Monome $X^iY^jZ^\ell$ mit $i+j \leq r-1$ verschwinden. Von diesen gibt es genau $1 + \cdots + r = r(r+1)/2$, woraus die Behauptung folgt. □

Also ist

$$\forall_{j\in\{1,\dots,n\}} \quad \dim V(d; r_j P_j) = \frac{r_j(r_j+1)}{2},$$

und

$$\begin{aligned}\dim V(d; r_1,\dots,r_n P_n) &= \dim \bigcap_{j=1}^{n} V(d; r_j P_j)\\ &= -1 + \dim_k \{0\} \cup \{x \in \mathbf{A}^{n+1} \mid [x] \in \bigcap_{j=1}^{n} V(d; r_j P_j)\}\\ &= -1 + \dim_k \bigcap_{j=1}^{n} \{0\} \cup \{x \in \mathbf{A}^{n+1} \mid [x] \in V(d; r_j P_j)\}.\end{aligned}$$

Sind $U, V \subset W$ Untervektorräume und $w := \dim_k W, \dim_k U = w - u$, sowie $\dim_k V = w - v$, so ist

$$\dim_k W \geq \dim_k U + \dim_k V - \dim_k U \cap V,$$

und damit

$$\dim_k U \cap V \geq w - u - v.$$

Also erhalten wir durch vollständige Induktion den ersten Teil des Satzes.
2. Wir zeigen dies durch vollständige Induktion über $m := -1 + \sum_{j=1}^{n} r_j$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Sei $r_1 = \cdots = r_n = 1$. Dann setzen wir

  $$\forall_{j\in\{1,\dots,n\}} \quad V_j := V(d; P_1, \dots, P_j),$$

  und zeigen die Behauptung durch Induktion über j. Der Induktionsanfang $j = 1$ folgt aus obigem Lemma. Sei also $j > 1$ und $\dim V_j = d(d+3)/2 - j$. Wegen (1) genügt es nun zu zeigen, dass $V_{j+1} \neq V_j$ ist:

  Zu $i \in \{1, \dots, j\}$ wählen wir (s.u.) projektive Geraden L_i, die durch P_i gehen, aber keinen der Punkte P_ℓ enthalten (für alle $\ell \neq i$). Sei weiter L_0 eine projektive Gerade, die keinen der Punkte $P_1, \dots, P_{j+1}$ enthält. Dann liegt

  $$L_1 \cdot \dots \cdot L_j \cdot L_0^{d-j}$$

  in V_j, aber nicht in V_{j+1}. Insbesondere ist also $V_{j+1} \neq V_j$.

Der Fall $m = 0$ folgt mit obigem Lemmea. Der Fall $m = 1$ folgt aus obigem Lemma bzw. dem ersten Fall. Sei also $d > 1$ und $d \geq m$.

- Es gebe ein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $r_j > 1$, oBdA $r := r_1 > 1$. Weiter sei oBdA $P := P_1 = [0 : 0 : 1]$. Wir setzen

  $$V_0 := V(d; (r-1)P, r_2 P_2, \dots, r_n P_n).$$

Ist $F \in V_0$, so existiert also eine Darstellung

$$F_{*Z} = \sum_{j=0}^{r-1} a_j^F X^j Y^{r-1-j} + \tilde{F},$$

wobei $\tilde{F}$ nur Terme vom Grad $\geq r$ besitzt. Ausserdem sei

$$\forall_{i \in \{1,\dots,r\}} \quad V_i := \{F \in V_0 \mid \forall_{j<i} \quad a_j^F = 0\},$$

d.h. $V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_r = V(d; rP, \dots r_n P_n)$. Dabei ist

$$\forall_{i \in \{0,\dots,r-1\}} \quad V_i \neq V_{i+1},$$

denn: Sei

$$W_0 := V(d-1; (r-2)P, r_2 P_2, \dots, r_n P_n)$$

und analog zu oben definieren wir $W_1, \dots, W_{r-1}$. Nach Induktionsvoraussetzung können wir annehmen, dass bereits

$$W_0 \supsetneq W_1 \supsetneq \cdots \supsetneq W_{r-1} = V(d-1; (r-1)P, r_2 P_2, \dots, r_n P_n)$$

gilt. Sei nun $i \in \{0, \dots, r-2\}$ und $F_i \in W_i \setminus W_{i+1}$. Dann ist $YF_i \in V_i \setminus V_{i+1}$ und $XF_{r-2} \in V_{r-1} \setminus V_r$, und damit

$$\forall_{i \in \{0,\dots,r-1\}} \quad V_i \neq V_{i+1}.$$

Also ist

$$\dim V(d; r_1 P_1, \dots, r_n P_n) = \dim V_r = \leq \dim V_0 - r.$$

Nach Induktionsvoraussetzung über m ist jedoch

$$\begin{aligned}\dim V_0 - r &= \frac{d(d+3)}{2} - \sum_{j=2}^{n} \frac{r_j(r_j+1)}{2} - \frac{(r_1-1)r_1}{2} - r_1 \\ &= \frac{d(d+3)}{2} - \sum_{j=2}^{n} \frac{r_j(r_j+1)}{2},\end{aligned}$$

woraus mit der Abschätzung aus (1) die Behauptung folgt. □

Im Beweis haben wir verwendet, dass es gewisse projektive Geraden gibt:

Lemma 11. *Seien $P, Q \in \mathbf{P}^2$ mit $P \neq Q$. Dann gibt es genau eine projektive Gerade, die durch P und Q geht.*

Beweis. Seien $P = [p_1 : p_2 : p_3]$ und $Q = [q_1 : q_2 : q_3]$. Nach Voraussetzung sind (p_1, p_2, p_3) und (q_1, q_2, q_3) in k^3 linear unabhängig, d.h. es gibt genau einen eindimensionalen Unterraum L, der auf (p_1, p_2, p_3) und (q_1, q_2, q_3) senkrecht steht. Dann ist $L \setminus \{0\}$ genau die Äquivalenzklasse von Geraden, die durch P und Q gehen. □

Korollar. *Seien* $P, P_1, \dots, P_n \in \mathbf{P}^2$ *verschiedene Punkte. Dann gibt es eine projektive Gerade, die durch* P *geht, aber durch keinen der Punkte* $P_1, \dots, P_n$.

Beweis. Offensichtlich gibt es unendlich viele projektive Geraden, die durch P gehen. Nach dem Lemma gibt es aber nur endlich viele projektive Geraden, die P und einen der Punkte $P_1, \dots, P_n$ enthalten. Also gibt es eine projektive Gerade durch P, die keinen der Punkte $P_1, \cdots, P_n$ enthält. □

Literatur

[Fu] Fulton, W. *Algebraic Curves*

[SAK] Strohm, Clara *Schnittzahlen ebener algebraischer Kurven* `http://www.fmi.uni-konstanz.de/~strohm/ac_sem`