Der zentrale Grenzwertsatz

C. Löh 9. März 2023

Der Zusammenhang zwischen relativen Häufigkeiten (d.h. arithmetischen Mitteln) und Wahrscheinlichkeiten ergibt sich durch die Gesetze der großen Zahlen:

Satz (starkes Gesetz der großen Zahlen). *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine stochastisch unabhängige Folge identisch verteilter quadratintegrierbarer reellwertiger Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, S, P). Dann gilt für die nach Erwartungswert normierten Mittel:*

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \bigl(X_k - \mathrm{E}(X_k)\bigr) \xrightarrow[n\to\infty]{P\text{-f.s.}} 0.$$

D.h. $P\bigl(\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} 1/n \cdot \sum_{k=1}^{n}(X_k(\omega) - \mathrm{E}(X_k)) = 0\}\bigr) = 1.$

Was passiert, wenn wir von Mitteln mit den Vorfaktoren „$1/n$“ zu den größeren Vorfaktoren „$1/\sqrt{n}$“ übergehen? Als Grenzverteilung tritt dann die Standardnormalverteilung auf (siehe auch das untenstehende Experiment):

Satz (zentraler Grenzwertsatz). *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine stochastisch unabhängige Folge identisch verteilter quadratintegrierbarer reellwertiger Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum mit* $\mathrm{Var}(X_1) > 0$. *Dann gilt für die nach Erwartungswert und Varianz normierten Mittel:*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_k)}} \cdot \bigl(X_k - \mathrm{E}(E_k)\bigr) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} N(0,1).$$

D.h. die Verteilungsfunktionen konvergieren in allen Punkten (an denen $F_{N(0,1)}$ stetig ist) gegen $F_{N(0,1)}$.

Definition (Standardnormalverteilung $N(0,1)$). Die *Standardnormalverteilung* $N(0,1)$ ist das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$, das durch die folgende Lebesgue-Dichte gegeben ist:

$$\begin{aligned} f_{N(0,1)} \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot t^2} \end{aligned}$$

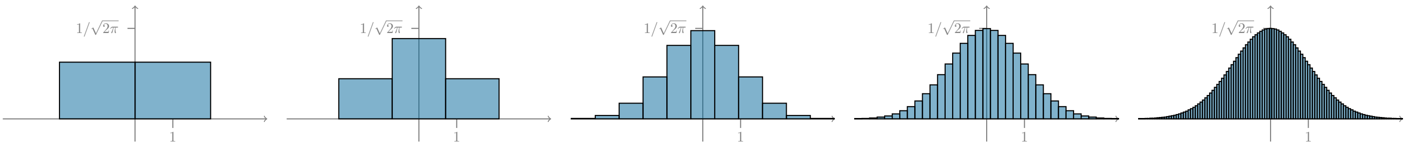
Bemerkung (Integrale).

- Um nachzuweisen, dass die Funktion $f_{N(0,1)}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ definiert, muss insbesondere gezeigt werden, dass $\int_{-\infty}^{\infty} f_{N(0,1)}(t)\, dt = 1$ gilt.
- Man kann beweisen, dass die Verteilungsfunktion

  $$\begin{aligned} F_{N(0,1)} \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto N(0,1)\bigl((-\infty, a]\bigr) = \int_{-\infty}^{a} f_{N(0,1)}(t)\, dt \end{aligned}$$

  der Standardnormalverteilung *keine* explizite geschlossene Darstellung durch elementare Funktionen besitzt (!).

Experiment (varianznormierte Mittel der Gleichverteilung auf $\{0,1\}$)**.** Wir betrachten die Mittel aus dem zentralen Grenzwertsatz für den Fall, dass die Zufallsvariablen auf $\{0,1\}$ gleichverteilt sind. Wir stellen die entsprechenden Zähldichten für die Werte 1, 2, 10, 100, 1000 von „n“ durch flächentreue Histogramme dar. Dass sich diese Histogramme der Dichte $f_{N(0,1)}$ annähern, entspricht der Verteilungskonvergenz aus dem zentralen Grenzwertsatz. (Dies ist ein lehrreiches Programmier- und Visualisierungsprojekt!)



Beweisskizze des zentralen Grenzwertsatzes. Fouriertransformation liefert einen eleganten Beweis: Ist X eine reellwertige Zufallsvariable, so ist

$$\begin{aligned}\varphi_X \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C}\\ t &\longmapsto \mathrm{E}(e^{i\cdot t\cdot X})\end{aligned}$$

die *Fouriertransformation von* X; diese hängt nur von der Verteilung von X ab. Die Fouriertransformation von $N(0,1)$ ist $\varphi_{N(0,1)} \colon t \mapsto e^{-t^2/2}$.

Nach dem sogenannten Stetigkeitssatz konvergiert eine Folge genau dann in Verteilung gegen $N(0,1)$, wenn die Fouriertransformierten punktweise gegen $\varphi_{N(0,1)}$ konvergiert. Da die $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als stochastisch unabhängig und identisch verteilt vorausgesetzt sind, erhält man aus den Eigenschaften der Fouriertransformation und einer Taylorentwicklung für alle $t \in \mathbb{R}$, dass

$$\begin{aligned}\varphi_{\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_k)}}\cdot(X_k-\mathrm{E}(E_k))}(t) &= \prod_{k=1}^n \varphi_{\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_k)}}\cdot(X_k-\mathrm{E}(X_k))}\Bigl(\frac{t}{\sqrt{n}}\Bigr) && \text{(stochastisch unabhängig)}\\ &= \Bigl(\varphi_{\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)}}\cdot(X_1-\mathrm{E}(X_1))}\Bigl(\frac{t}{\sqrt{n}}\Bigr)\Bigr)^n && \text{(identisch verteilt)}\\ &= \Bigl(1-\frac{t^2}{2n}+R_2\Bigl(\frac{t}{\sqrt{n}}\Bigr)\Bigr)^n && \text{(Taylorentwicklung),}\end{aligned}$$

wobei $\lim_{n\to\infty} R_2(t/\sqrt{n})/(t/\sqrt{n})^2 = 0$ gilt. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\varphi_{\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_k)}}\cdot(X_k-\mathrm{E}(E_k))}(t) &= \lim_{n\to\infty}\Bigl(1-\frac{t^2}{2n}+R_2\Bigl(\frac{t}{\sqrt{n}}\Bigr)\Bigr)^n = e^{-t^2/2}\\ &= \varphi_{N(0,1)}(t).\end{aligned}$$

Mit dem Stetigkeitssatz folgt die Behauptung. □

Bemerkung (Konvergenzkontrolle)**.** In der Praxis ist eine abstrakte Konvergenzaussage wie im zentralen Grenzwertsatz nicht ausreichend, um Mittel durch Normalverteilungen zu ersetzen. Es ist dabei unerlässlich, auch eine A-Priori-Garantie über die Konvergenzgeschwindigkeit zu kennen. Eine solche wird für den zentralen Grenzwertsatz durch den Satz von Berry–Esséen geliefert (wenn die dritten Momente existieren).

Clara Löh, Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg
https://loeh.app.ur.de, clara.loeh@ur.de