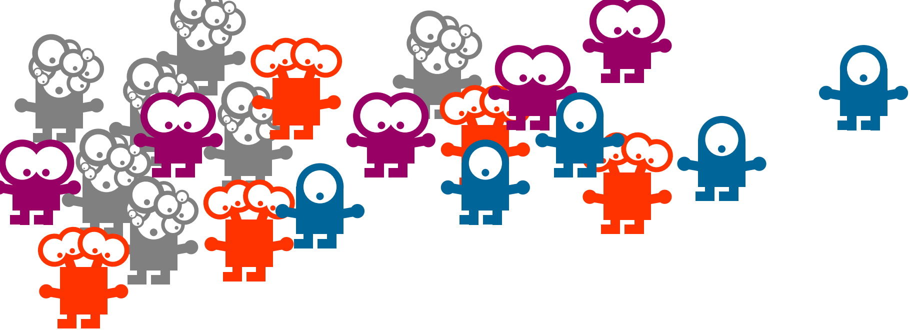


1, 2, 3, . . . zu viele

Clara Löh, 04/2019, Universität für Kinder
Fakultät für Mathematik. Universität Regensburg

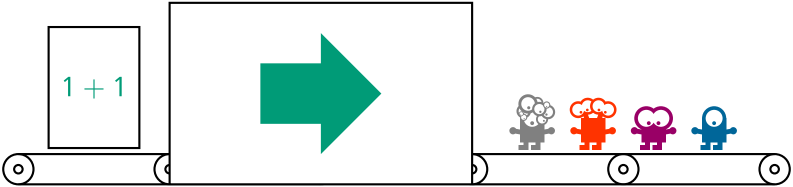
Universität Regensburg

UNIVERSITÄT FÜR KINDER 2019

Willkommen an der Universität für Kinder!

Willkommen an der Universität für Zahlen!

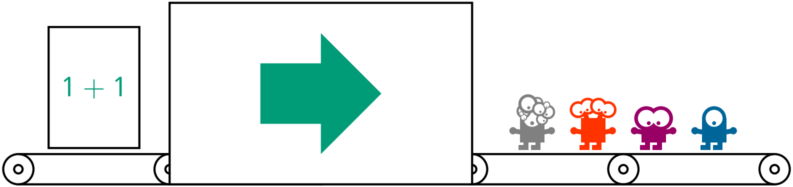
Willkommen an der Universität für ~~Kinder~~ Zahlen!



Fragen

- Kann „alles“ berechnet werden?

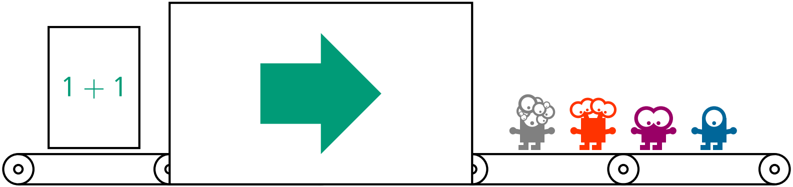
Willkommen an der Universität für Zahlen!



Fragen

- Kann „alles“ berechnet werden?
- Kann jede Zahl berechnet werden?

Willkommen an der Universität für ~~Kinder~~ Zahlen!



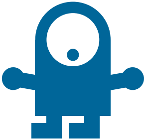
Fragen

- Kann „alles“ berechnet werden?
- Kann jede Zahl berechnet werden?
- Welche und wie viele Zahlen gibt es?

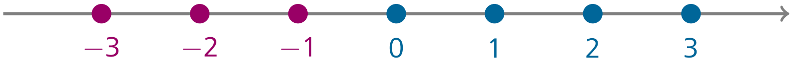
Welche Zahlen gibt es?

Welche Zahlen gibt es?

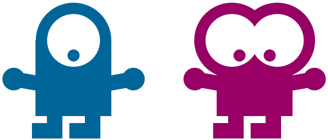
- natürliche Zahlen: 0, 1, 2, 3, ...



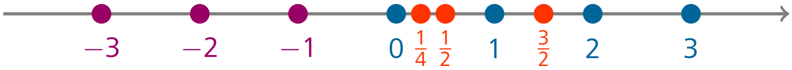
Welche Zahlen gibt es?



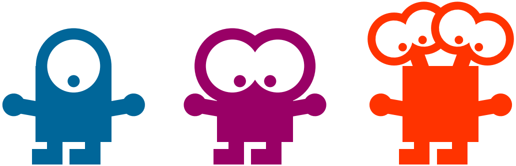
- natürliche Zahlen: $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots$
- ganze Zahlen: $\dots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots$



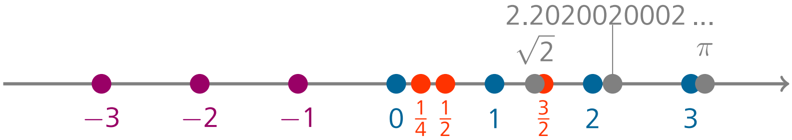
Welche Zahlen gibt es?



- natürliche Zahlen: $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots$
- ganze Zahlen: $\dots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots$
- rationale Zahlen: $\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2019},\ -\frac{5}{3},\ \dots$

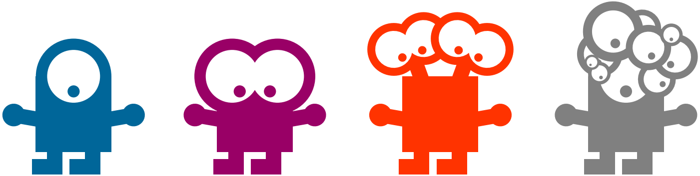


Welche Zahlen gibt es?

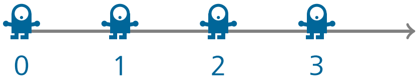


- natürliche Zahlen: $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots$
- ganze Zahlen: $\dots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots$
- rationale Zahlen: $\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2019},\ -\frac{5}{3},\ \dots$
- reelle Zahlen: $\sqrt{2},\ \pi,\ 2.202002000200002\dots,\ \dots$

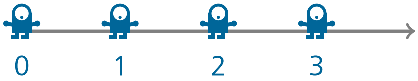
  Diese füllen den Zahlenstrahl lückenlos aus.



Wie große/Wie viele natürliche Zahlen gibt es?



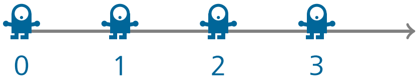
Wie große/Wie viele natürliche Zahlen gibt es?



Beobachtung

Es gibt *keine* größte natürliche Zahl.

Wie große/Wie viele natürliche Zahlen gibt es?

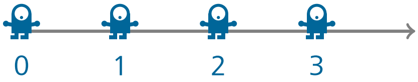


Beobachtung

Es gibt *keine* größte natürliche Zahl.

Beweis?!

Wie große/Wie viele natürliche Zahlen gibt es?



Beobachtung

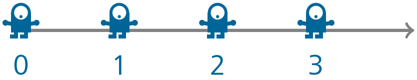
Es gibt *keine* größte natürliche Zahl.

Beweis?!

Denn:

- Angenommen, es gäbe eine größte natürliche Zahl, *Xörxillion*.

Wie große/Wie viele natürliche Zahlen gibt es?



Beobachtung

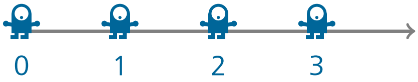
Es gibt *keine* größte natürliche Zahl.

Beweis?!

Denn:

- Angenommen, es gäbe eine größte natürliche Zahl, *Xörxillion*.
- Dann wäre *Xörxillion* $+ 1$ auch eine natürliche Zahl,
  die aber größer als *Xörxillion* ist.

Wie große/Wie viele natürliche Zahlen gibt es?



Beobachtung

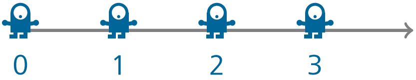
Es gibt *keine* größte natürliche Zahl.

Beweis?!

Denn:

- Angenommen, es gäbe eine größte natürliche Zahl, *Xörxillion*.
- Dann wäre *Xörxillion* $+ 1$ auch eine natürliche Zahl,
  die aber größer als *Xörxillion* ist.
- Dieser Widerspruch zeigt, dass es keine größte natürliche Zahl gibt.

Wie große/Wie viele natürliche Zahlen gibt es?



Beobachtung

Es gibt *keine* größte natürliche Zahl.

Beweis?!

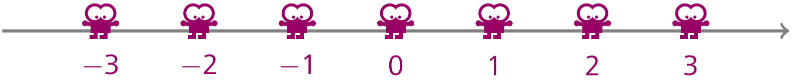
Denn:

- Angenommen, es gäbe eine größte natürliche Zahl, *Xörxillion*.
- Dann wäre *Xörxillion* $+ 1$ auch eine natürliche Zahl,
  die aber größer als *Xörxillion* ist.
- Dieser Widerspruch zeigt, dass es keine größte natürliche Zahl gibt.

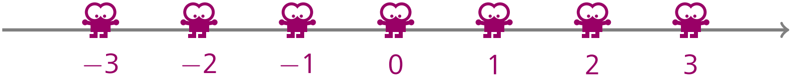
Antwort

Also gibt es unendlich viele natürliche Zahlen.

Wie viele ganze Zahlen gibt es?



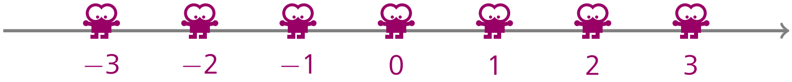
Wie viele ganze Zahlen gibt es?



Antwort

Da es bereits unendlich viele natürliche Zahlen gibt,
gibt es auch unendlich viele ganze Zahlen.

Wie viele ganze Zahlen gibt es?



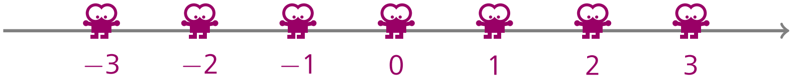
Antwort

Da es bereits unendlich viele natürliche Zahlen gibt,
gibt es auch unendlich viele ganze Zahlen.

Frage

Gibt es wirklich mehr ganze Zahlen als natürliche Zahlen?

Wie viele ganze Zahlen gibt es?



Antwort

Da es bereits unendlich viele natürliche Zahlen gibt,
gibt es auch unendlich viele ganze Zahlen.

Frage

Gibt es wirklich mehr ganze Zahlen als natürliche Zahlen?

Wir machen ein Experiment an der Universität für Zahlen!

Experiment

Experiment

- Audimax der Universität Regensburg:

Experiment

- Audimax der Universität Regensburg:
  ca. 1500 Plätze viel zu winzig für unser Experiment!

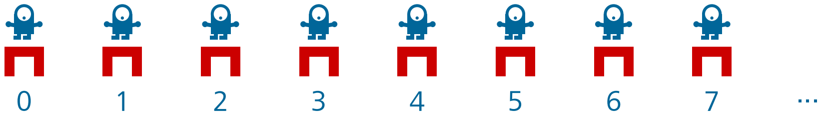
Experiment

- Audimax der Universität Regensburg:
  ca. 1500 Plätze viel zu winzig für unser Experiment!
- Audinax der Universität für Zahlen:
  je ein Platz für jede natürliche Zahl

0 1 2 3 4 5 6 7 ...

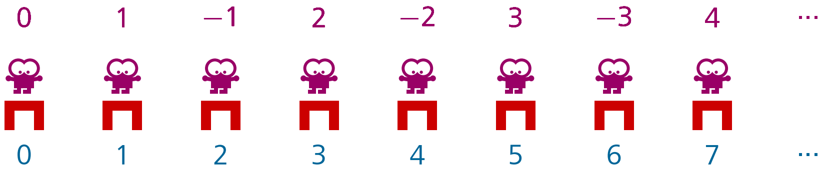
Experiment

- Audimax der Universität Regensburg:
  ca. 1500 Plätze viel zu winzig für unser Experiment!
- Audinax der Universität für Zahlen:
  je ein Platz für jede natürliche Zahl



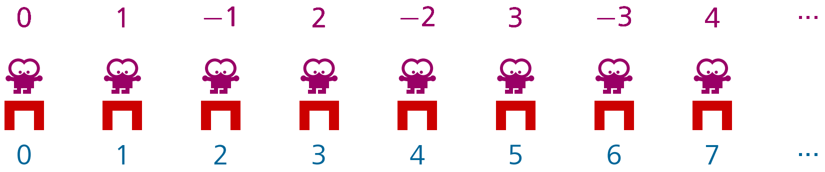
Experiment

- Audimax der Universität Regensburg:
  ca. 1500 Plätze viel zu winzig für unser Experiment!
- Audinax der Universität für Zahlen:
  je ein Platz für jede natürliche Zahl
- Passen die ganzen Zahlen ins Audinax?



Experiment

- Audimax der Universität Regensburg:
  ca. 1500 Plätze viel zu winzig für unser Experiment!
- Audinax der Universität für Zahlen:
  je ein Platz für jede natürliche Zahl
- Passen die ganzen Zahlen ins Audinax?

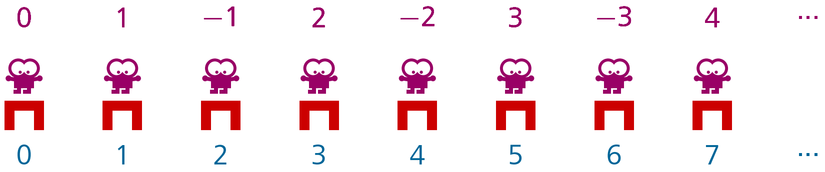


Ergebnis

Die ganzen Zahlen passen also ins Audinax!
wenn auch in ungewohnter Reihenfolge

Experiment

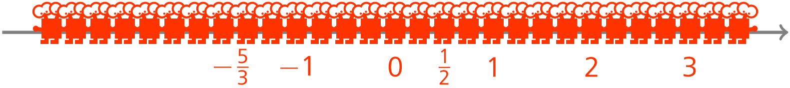
- Audimax der Universität Regensburg:
  ca. 1500 Plätze viel zu winzig für unser Experiment!
- Audinax der Universität für Zahlen:
  je ein Platz für jede natürliche Zahl
- Passen die ganzen Zahlen ins Audinax?



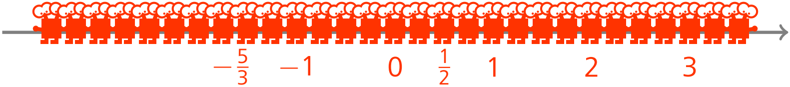
Ergebnis

Die ganzen Zahlen passen also ins Audinax!
wenn auch in ungewohnter Reihenfolge
Es gibt gleich viele natürliche und ganze Zahlen.

Wie viele rationale Zahlen gibt es?



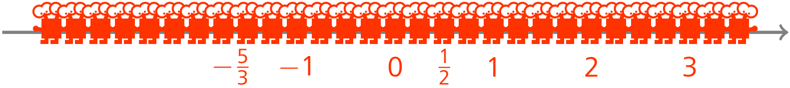
Wie viele rationale Zahlen gibt es?



Rationale Zahlen sind:

- alle natürlichen/ganzen Zahlen
- alle Brüche aus ganzen Zahlen
- z.B.: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2019}$, $-\frac{5}{3}$, ...

Wie viele rationale Zahlen gibt es?



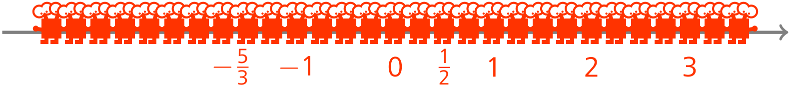
Rationale Zahlen sind:

- alle natürlichen/ganzen Zahlen
- alle Brüche aus ganzen Zahlen
- z.B.: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2019}, -\frac{5}{3}, \dots$

Antwort

Da es bereits unendlich viele natürliche Zahlen gibt,
gibt es auch unendlich viele rationale Zahlen.

Wie viele rationale Zahlen gibt es?



Rationale Zahlen sind:

- alle natürlichen/ganzen Zahlen
- alle Brüche aus ganzen Zahlen
- z.B.: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2019}$, $-\frac{5}{3}$, ...

Antwort

Da es bereits unendlich viele natürliche Zahlen gibt, gibt es auch unendlich viele rationale Zahlen.

Frage

Passen die rationalen Zahlen ins Audinax?

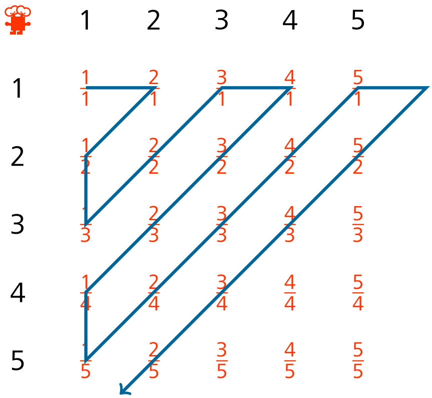
Passen die rationalen Zahlen ins Audinax?

	1	2	3	4	5
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$

Passen die rationalen Zahlen ins Audinax?

	1	2	3	4	5
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$

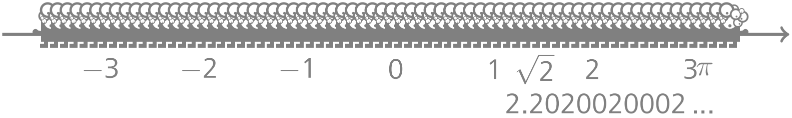
Passen die rationalen Zahlen ins Audinax?



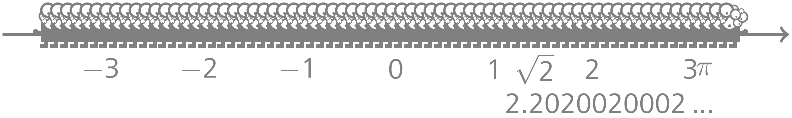
Antwort

Da man die rationalen Zahlen durch natürliche Zahlen numerieren kann, wenn auch in ungewohnter Reihenfolge, gibt es gleich viele natürliche und rationale Zahlen.

Wie viele reelle Zahlen gibt es?



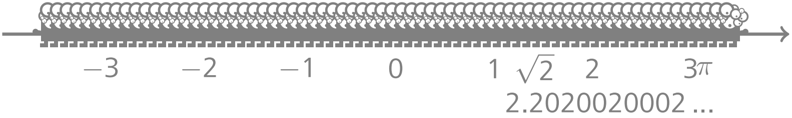
Wie viele reelle Zahlen gibt es?



Reelle Zahlen sind:

- alle natürlichen/ganzen/rationalen Zahlen
- alle Zahlen, die sich als (unendliche) Dezimalbrüche darstellen lassen
- z.B. $\sqrt{2}$, π, $2.202002000200002\ldots$, ...

Wie viele reelle Zahlen gibt es?



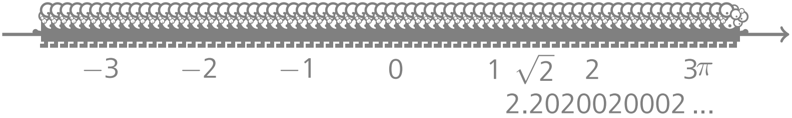
Reelle Zahlen sind:

- alle natürlichen/ganzen/rationalen Zahlen
- alle Zahlen, die sich als (unendliche) Dezimalbrüche darstellen lassen
- z.B. $\sqrt{2}$, π, $2.202002000200002\ldots$, ...

Antwort

Da es bereits unendlich viele natürliche Zahlen gibt,
gibt es auch unendlich viele reelle Zahlen.

Wie viele reelle Zahlen gibt es?



Reelle Zahlen sind:

- alle natürlichen/ganzen/rationalen Zahlen
- alle Zahlen, die sich als (unendliche) Dezimalbrüche darstellen lassen
- z.B. $\sqrt{2}$, π, $2.202002000200002\ldots$, ...

Antwort

Da es bereits unendlich viele natürliche Zahlen gibt,
gibt es auch unendlich viele reelle Zahlen.

Frage

Passen die reellen Zahlen ins Audinax?

Passen die reellen Zahlen ins Audinax?

Passen die reellen Zahlen ins Audinax?

Angenommen, man könnte die reellen Zahlen aufzählen.

Passen die reellen Zahlen ins Audinax?

Angenommen, man könnte die reellen Zahlen aufzählen.
Dann erst recht auch alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1.

- Wir erhalten somit eine Liste

1	0.	irgendwas
2	0.	irgendwas
3	0.	irgendwas
4	0.	irgendwas

Passen die reellen Zahlen ins Audinax?

Angenommen, man könnte die reellen Zahlen aufzählen.
Dann erst recht auch alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1.

- Wir erhalten somit eine Liste

$$
\begin{array}{lllllll}
1 & 0. & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots \\
2 & 0. & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots \\
3 & 0. & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & \cdots \\
4 & 0. & a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & \cdots
\end{array}
$$

Passen die reellen Zahlen ins Audinax?

Angenommen, man könnte die reellen Zahlen aufzählen.
Dann erst recht auch alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1.

- Wir erhalten somit eine Liste

$$\begin{array}{ll}
1 & 0.\ a_{1,1}\ a_{1,2}\ a_{1,3}\ a_{1,4}\ \cdots \\
2 & 0.\ a_{2,1}\ a_{2,2}\ a_{2,3}\ a_{2,4}\ \cdots \\
3 & 0.\ a_{3,1}\ a_{3,2}\ a_{3,3}\ a_{3,4}\ \cdots \\
4 & 0.\ a_{4,1}\ a_{4,2}\ a_{4,3}\ a_{4,4}\ \cdots
\end{array}$$

Passen die reellen Zahlen ins Audinax?

Angenommen, man könnte die reellen Zahlen aufzählen.

Dann erst recht auch alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1.

- Wir erhalten somit eine Liste

$$\begin{array}{llllll} 1 & 0. & x_1 & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \;\cdots \\ 2 & 0. & a_{2,1} & x_2 & a_{2,3} & a_{2,4} \;\cdots \\ 3 & 0. & a_{3,1} & a_{3,2} & x_3 & a_{3,4} \;\cdots \\ 4 & 0. & a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & x_4 \;\cdots \end{array}$$

$$x_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } a_{n,n} \neq 1 \\ 2 & \text{falls } a_{n,n} = 1 \end{cases}$$

- Wir betrachten dann die reelle Zahl $x := 0.x_1 x_2 x_3 \ldots$

Passen die reellen Zahlen ins Audinax?

Angenommen, man könnte die reellen Zahlen aufzählen.
Dann erst recht auch alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1.

- Wir erhalten somit eine Liste

$$\begin{array}{llllll}
1 & 0. & x_1 & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \; \cdots \\
2 & 0. & a_{2,1} & x_2 & a_{2,3} & a_{2,4} \; \cdots \\
3 & 0. & a_{3,1} & a_{3,2} & x_3 & a_{3,4} \; \cdots \\
4 & 0. & a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & x_4 \; \cdots
\end{array}
\qquad
x_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } a_{n,n} \neq 1 \\ 2 & \text{falls } a_{n,n} = 1 \end{cases}$$

- Wir betrachten dann die reelle Zahl $x := 0.x_1x_2x_3 \dots$
- Wäre x an Position n der Liste, so müsste $x_n = a_{n,n}$ sein.
  Nach Konstruktion ist dies jedoch nicht der Fall.

Passen die reellen Zahlen ins Audinax?

Angenommen, man könnte die reellen Zahlen aufzählen.

Dann erst recht auch alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1.

- Wir erhalten somit eine Liste

$$
\begin{array}{rl}
1 & 0.\ x_1\ a_{1,2}\ a_{1,3}\ a_{1,4}\ \cdots \\
2 & 0.\ a_{2,1}\ x_2\ a_{2,3}\ a_{2,4}\ \cdots \\
3 & 0.\ a_{3,1}\ a_{3,2}\ x_3\ a_{3,4}\ \cdots \\
4 & 0.\ a_{4,1}\ a_{4,2}\ a_{4,3}\ x_4\ \cdots
\end{array}
\qquad
x_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } a_{n,n} \neq 1 \\ 2 & \text{falls } a_{n,n} = 1 \end{cases}
$$

- Wir betrachten dann die reelle Zahl $x := 0.x_1x_2x_3\ldots$
- Wäre x an Position n der Liste, so müsste $x_n = a_{n,n}$ sein.
  Nach Konstruktion ist dies jedoch nicht der Fall.
- Also steht x *nicht* in unserer Liste!
  Somit sind die reellen Zahlen nicht abzählbar.

Zahlen: Zusammenfassung

Zahlen: Zusammenfassung

Es gibt viiiiiiiiiiiiiiiiiiiiiiel mehr reelle als natürliche Zahlen!

- Die ganzen/rationalen Zahlen sind abzählbar.
- Die reellen Zahlen sind nicht abzählbar.

Zahlen: Zusammenfassung

Es gibt viiiiiiiiiiiiiiiiiiiiiiel mehr reelle als natürliche Zahlen!

- Die ganzen/rationalen Zahlen sind abzählbar.
- Die reellen Zahlen sind nicht abzählbar.

Wer hat's erfunden/entdeckt?

Zahlen: Zusammenfassung

Es gibt viiiiiiiiiiiiiiiiiiiiiiel mehr reelle als natürliche Zahlen!

- Die ganzen/rationalen Zahlen sind abzählbar.
- Die reellen Zahlen sind nicht abzählbar.

Wer hat's erfunden/entdeckt? Georg Cantor (1871)

Zahlen: Zusammenfassung

Es gibt viiiiiiiiiiiiiiiiiiiiiel mehr reelle als natürliche Zahlen!

- Die ganzen/rationalen Zahlen sind abzählbar.
- Die reellen Zahlen sind nicht abzählbar.

Wer hat's erfunden/entdeckt? Georg Cantor (1871)

Frage

Was hat das mit Berechenbarkeit zu tun?

Berechenbarkeit

Berechenbarkeit

Idee

Wir definieren Berechenbarkeit durch Computerprogramme.

Berechenbarkeit

Idee

Wir definieren Berechenbarkeit durch Computerprogramme.

- Ein Computerpogramm ist eine endliche Liste von Symbolen eines entsprechenden Alphabets (z.B. Unicode).

```
print("Hello World")
```

Berechenbarkeit

Idee

Wir definieren Berechenbarkeit durch Computerprogramme.

- Ein Computerpogramm ist eine endliche Liste von Symbolen eines entsprechenden Alphabets (z.B. Unicode).

```
print("Hello World")
```

- Eine Zahl ist berechenbar, wenn es ein Computerprogramm gibt, das Schritt für Schritt alle Ziffern der Zahl der Reihe nach ausgibt.

$$2.20200200020000200000200000020000000 2\ldots$$

Berechenbarkeit

Idee

Wir definieren Berechenbarkeit durch Computerprogramme.

- Ein Computerpogramm ist eine endliche Liste von Symbolen eines entsprechenden Alphabets (z.B. Unicode).

```
print("Hello World")
```

- Eine Zahl ist berechenbar, wenn es ein Computerprogramm gibt, das Schritt für Schritt alle Ziffern der Zahl der Reihe nach ausgibt.

$$2.20200200020000200000200000020000000 2\dots$$

- Ein Computerprogramm muss nicht unbedingt stoppen, aber jede Ziffer muss nach endlicher Wartezeit ausgegeben werden.

Berechenbarkeit

Idee

Wir definieren Berechenbarkeit durch Computerprogramme.

- Ein Computerpogramm ist eine endliche Liste von Symbolen eines entsprechenden Alphabets (z.B. Unicode).

```
print("Hello World")
```

- Eine Zahl ist berechenbar, wenn es ein Computerprogramm gibt, das Schritt für Schritt alle Ziffern der Zahl der Reihe nach ausgibt.

$$2.2020020002000020000020000002000000002\dots$$

- Ein Computerprogramm muss nicht unbedingt stoppen, aber jede Ziffer muss nach endlicher Wartezeit ausgegeben werden.
- Außerdem nehmen wir an, dass wir beliebig viel Speicherplatz zur Verfügung haben.

Kann jede natürliche Zahl berechnet werden?

Kann jede natürliche Zahl berechnet werden?

- Ist n eine natürliche Zahl, so ist die Dezimaldarstellung von n eine *endliche* Liste von Ziffern.
- Ein Programm, das diese Liste Schritt für Schritt ausgibt, berechnet somit n.

Kann jede natürliche Zahl berechnet werden?

- Ist n eine natürliche Zahl, so ist die Dezimaldarstellung von n eine *endliche* Liste von Ziffern.
- Ein Programm, das diese Liste Schritt für Schritt ausgibt, berechnet somit n.

Antwort

Jede natürliche Zahl kann berechnet werden.

Kann jede natürliche Zahl berechnet werden?

- Ist n eine natürliche Zahl, so ist die Dezimaldarstellung von n eine *endliche* Liste von Ziffern.
- Ein Programm, das diese Liste Schritt für Schritt ausgibt, berechnet somit n.

Antwort

Jede natürliche Zahl kann berechnet werden.

Außerdem gilt:

- Jede ganze Zahl ist berechenbar.
- Jede rationale Zahl ist berechenbar (als Dezimalbruch) z.B. $\frac{1}{3} = 0.3333333\ldots$

Kann jede reelle Zahl berechnet werden?

Kann jede reelle Zahl berechnet werden?

Manche irrationalen Zahlen können berechnet werden, zum Beispiel:

- 2.2020020002 ...
- $\sqrt{2}$
- π

```
pi = g(1,0,1,1,3,3) where
  g(q,r,t,k,n,l) = if 4*q+r-t<n*t
    then n : g(10*q,10*(r-n*t),t,k,div(10*(3*q+r))t-10*n,l)
    else g(q*k,(2*q+r)*l,t*l,k+1,div(q*(7*k+2)+r*l)(t*l),l+2)
```

(Gibbons; Unbounded Spigot Algorithms for the Digits of Pi)

Kann jede reelle Zahl berechnet werden?

Manche irrationalen Zahlen können berechnet werden, zum Beispiel:

- 2.2020020002 ...
- $\sqrt{2}$
- π

```
pi = g(1,0,1,1,3,3) where
  g(q,r,t,k,n,l) = if 4*q+r-t<n*t
    then n : g(10*q,10*(r-n*t),t,k,div(10*(3*q+r))t-10*n,l)
    else g(q*k,(2*q+r)*l,t*l,k+1,div(q*(7*k+2)+r*l)(t*l),l+2)
```

(Gibbons; Unbounded Spigot Algorithms for the Digits of Pi)

Frage

Aber geht das für jede reelle Zahl?!

Wie viele Computerprogramme gibt es?

Wie viele Computerprogramme gibt es?

Es gibt nur endlich viele Programme der Länge 1

Wie viele Computerprogramme gibt es?

Es gibt nur endlich viele Programme der Länge 1

□ □ □ □ □ □ □ □ □

Es gibt nur endlich viele Programme der Länge 2

□ □ □ □ □ □ □ □ □

Wie viele Computerprogramme gibt es?

Es gibt nur endlich viele Programme der Länge 1

□ □ □ □ □ □ □ □ □

Es gibt nur endlich viele Programme der Länge 2

□ □ □ □ □ □ □ □ □

Es gibt nur endlich viele Programme der Länge 3

□ □ □ □ □ □ □ □ □

Wie viele Computerprogramme gibt es?

Es gibt nur endlich viele Programme der Länge 1

□ □ □ □ □ □ □ □ □

Es gibt nur endlich viele Programme der Länge 2

□ □ □ □ □ □ □ □ □

Es gibt nur endlich viele Programme der Länge 3

□ □ □ □ □ □ □ □ □

Es gibt nur endlich viele Programme der Länge 4

□ □ □ □ □ □ □ □ □

Wie viele Computerprogramme gibt es?

Es gibt nur endlich viele Programme der Länge 1

Es gibt nur endlich viele Programme der Länge 2

Es gibt nur endlich viele Programme der Länge 3

Es gibt nur endlich viele Programme der Länge 4

Wie viele Computerprogramme gibt es?

Es gibt nur endlich viele Programme der Länge 1

Es gibt nur endlich viele Programme der Länge 2

Es gibt nur endlich viele Programme der Länge 3

Es gibt nur endlich viele Programme der Länge 4

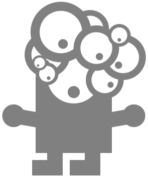
Antwort

Es gibt also nur abzählbar viele Computerprogramme.

Alle Computerprogramme passen ins Audinax!

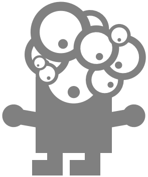
Kann jede reelle Zahl berechnet werden?!

Kann jede reelle Zahl berechnet werden?!



Nein, denn es gibt gar nicht genug Programme:

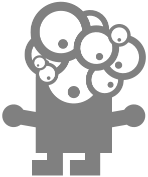
Kann jede reelle Zahl berechnet werden?!



Nein, denn es gibt gar nicht genug Programme:

- Angenommen, es gäbe für jede reelle Zahl x ein Programm das x berechnet.

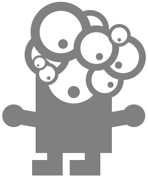
Kann jede reelle Zahl berechnet werden?!



Nein, denn es gibt gar nicht genug Programme:

- Angenommen, es gäbe für jede reelle Zahl x ein Programm das x berechnet.
- Da es überabzählbar viele reelle Zahlen gibt, müsste es auch überabzählbar viele Programme geben.

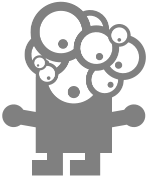
Kann jede reelle Zahl berechnet werden?!



Nein, denn es gibt gar nicht genug Programme:

- Angenommen, es gäbe für jede reelle Zahl x ein Programm das x berechnet.
- Da es überabzählbar viele reelle Zahlen gibt, müsste es auch überabzählbar viele Programme geben.
- Dies steht im Widerspruch zu unserer vorherigen Überlegung.

Kann jede reelle Zahl berechnet werden?!



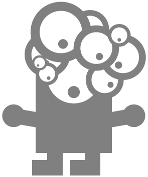
Nein, denn es gibt gar nicht genug Programme:

- Angenommen, es gäbe für jede reelle Zahl x ein Programm das x berechnet.
- Da es überabzählbar viele reelle Zahlen gibt, müsste es auch überabzählbar viele Programme geben.
- Dies steht im Widerspruch zu unserer vorherigen Überlegung.

Antwort

Es kann also nicht jede reelle Zahl berechnet werden.

Kann jede reelle Zahl berechnet werden?!



Nein, denn es gibt gar nicht genug Programme:

- Angenommen, es gäbe für jede reelle Zahl x ein Programm das x berechnet.
- Da es überabzählbar viele reelle Zahlen gibt, müsste es auch überabzählbar viele Programme geben.
- Dies steht im Widerspruch zu unserer vorherigen Überlegung.

Antwort

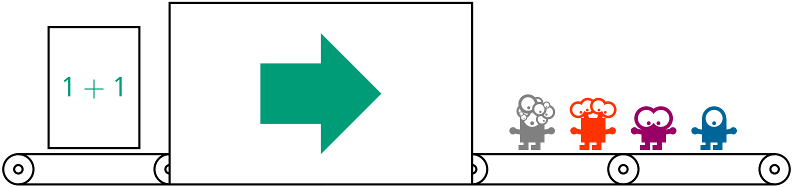
Es kann also nicht jede reelle Zahl berechnet werden.

Dasselbe Argument zeigt auch: Nicht jede Folge von natürlichen Zahlen kann durch ein Programm beschrieben werden.

Zusammenfassung

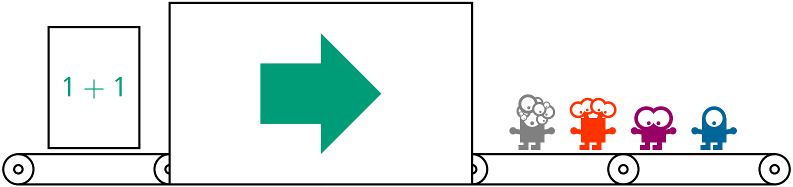
- Wie viele Zahlen gibt es?

- Ist jede Zahl berechenbar?



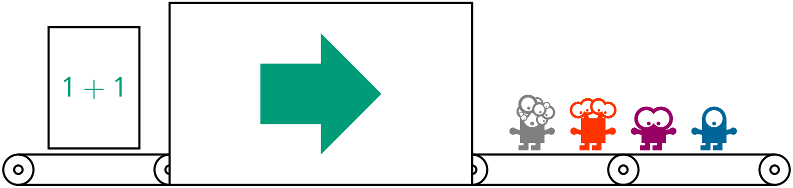
Zusammenfassung

- Wie viele Zahlen gibt es?
  Es gibt gleich viele natürliche, ganze und rationale Zahlen,
  aber es gibt viiiiiiiiiiiiiel mehr reelle Zahlen.
- Ist jede Zahl berechenbar?



Zusammenfassung

- Wie viele Zahlen gibt es?
  Es gibt gleich viele natürliche, ganze und rationale Zahlen,
  aber es gibt viiiiiiiiiiiiiel mehr reelle Zahlen.
- Ist jede Zahl berechenbar?
  Nein!
  Da es nur abzählbar viele Computerprogramme gibt,
  gibt es reelle Zahlen, die nicht berechenbar sind.



Zusammenfassung

- Wie viele Zahlen gibt es?
  Es gibt gleich viele natürliche, ganze und rationale Zahlen,
  aber es gibt viiiiiiiiiiiiiel mehr reelle Zahlen.
- Ist jede Zahl berechenbar?
  Nein!
  Da es nur abzählbar viele Computerprogramme gibt,
  gibt es reelle Zahlen, die nicht berechenbar sind.
- Das zentrale Argument geht auf Cantor zurück,
  also lange bevor die ersten Computer erdacht/gebaut waren!