1, 2, 3, . . . zu viele

Was haben verschiedene Unendlichkeiten mit Computern zu tun?

Universität für Kinder, 30. April 2019

Clara Löh
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

Beflügelt durch die rasante technische Entwicklung der letzten Jahrzehnte mag man vielleicht dem Glauben erliegen, dass fast alles berechenbar sei. Allermindestens in der Mathematik. Oder doch nicht?

Bereits die Frage, welche Zahlen eigentlich berechenbar sind, führt schnell zu vertrackten, grundsätzlichen, Problemen – zum Beispiel zu der Frage, wie viele Zahlen es überhaupt gibt. Wir werden sehen, dass der Versuch, solche Fragen zu beantworten, einige überraschende Erkenntnisse bereithält. Insbesondere zeigt sich wie mathematische (und zunächst weltfremd erscheinende) Grundlagenforschung sinnvolle Antworten liefert.

Wir werden uns im folgenden mit diesen zwei Fragen beschäftigen:

- Welche und wie viele Zahlen gibt es?
- Kann jede Zahl berechnet werden?

Welche Zahlen gibt es?

Auf dem Zahlenstrahl wohnen die folgenden Arten von Zahlen (Abbildung 1):

- natürliche Zahlen: $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots$
- ganze Zahlen: $\dots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots$
- rationale Zahlen: alle ganzen Zahlen und Brüche; zum Beispiel $\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2019},\ -\frac{5}{3},\ \dots$
- reelle Zahlen: alle Zahlen, die sich als (unendliche) Dezimalbrüche darstellen lassen; zum Beispiel alle rationalen Zahlen sowie $\sqrt{2}$, die Kreiszahl π, $2.202002000200002\dots$. Die reellen Zahl füllen den Zahlenstrahl lückenlos aus.

Es gibt noch viele weitere Klassen von „Zahlen“; diese sind keineswegs nur abstrakte Spielerei, sondern haben sich in vielen Alltagsgegenständen bewährt (z.B. Verschlüsselung, Signalverarbeitung). Unser Hauptaugenmerk soll aber auf den vertrauten Zahlen des Zahlenstrahls liegen.

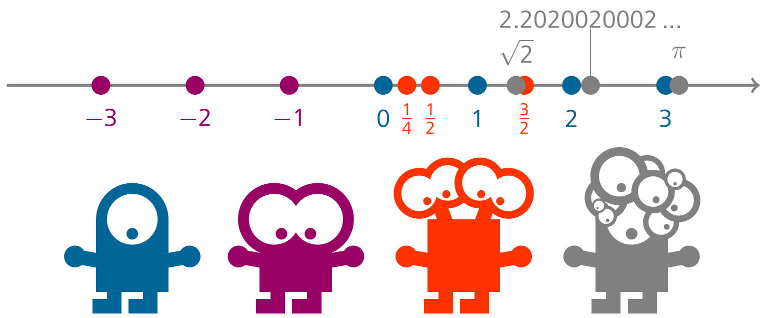

Abbildung 1: Natürliche, ganze, rationale, reelle Zahlen auf dem Zahlenstrahl

Wie viele Zahlen gibt es?

Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen

Wir überlegen uns zunächst, dass es *keine* größte natürliche Zahl gibt:

Beweis. *Angenommen*, es gäbe eine größte natürliche Zahl, nennen wir sie Xörxillion. Dann wäre Xörxillion + 1 auch eine natürliche Zahl, die aber *größer als* Xörxillion ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass unsere Annahme falsch gewesen sein muss, dass es also keine größte natürliche Zahl gibt. □

Da jede endliche Liste von natürlichen Zahlen eine größte enthalten muss, folgern wir: Es gibt **unendlich viele** natürliche Zahlen. Da die natürlichen Zahlen in den ganzen, rationalen, reellen Zahlen enthalten sind, gibt es auch von diesen Zahlen jeweils unendlich viele. Um herauszufinden, wie viele es von diesen Zahlen genau gibt, machen wir ein Experiment.

Das Audinax

Das **Audimax** (auditorium maximum, also der größte Hörsaal) der Universität Regensburg hat ungefähr 1500 Plätze; für unsere Experimente mit unendlichen Mengen von Zahlen ist das viel zu winzig! Wir betrachten daher das **Audinax** der Universität für Zahlen; dieses enthält für jede natürliche Zahl einen Platz (Abbildung 2).

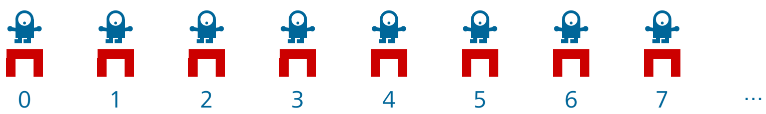

Abbildung 2: Im Audinax gibt es für jede natürliche Zahl einen Platz.

Obwohl es ganze bzw. rationale Zahlen gibt, die keine natürlichen Zahlen sind, passen sowohl die ganzen Zahlen als auch die rationalen Zahlen ins Audinax (Abbildung 3 und Abbildung 4), wenn auch in ungewohnter Reihenfolge. Es gibt also **gleich viele** ganze bzw. rationale Zahlen wie natürliche Zahlen.

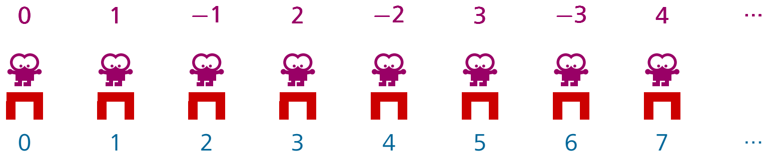

Abbildung 3: Auch die ganzen Zahlen passen ins Audinax (in ungewohnter Reihenfolge).

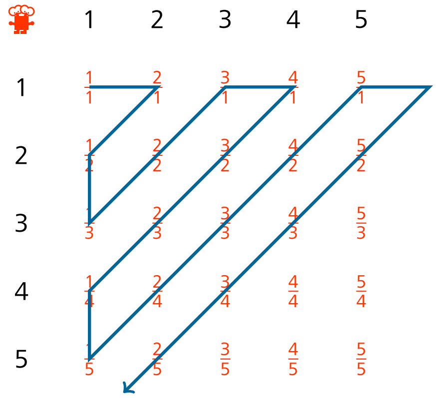

Abbildung 4: Sogar die rationalen Zahlen passen ins Audinax (in ungewohnter Reihenfolge). Der Übersichtlichkeit halber sind hier nur die positiven rationalen Zahlen aufgezählt und jede solche Zahl erhält sogar mehrere Plätze, wenn wir die ungekürzten Brüche nicht streichen.

Passen die reellen Zahlen ins Audinax?

Im Gegensatz zu den ganzen/rationale Zahlen passen die reellen Zahlen **nicht** ins Audinax:

Beweis. *Angenommen,* die reellen Zahlen würden ins Audinax passen. Dann passen erst recht auch alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 ins Audinax. Wir erhalten somit eine Liste wie in Abbildung 5, wobei die $a_{i,j}$ Ziffern sind. Wir betrachten nun die Ziffern auf der Diagonalen und wandeln diese jeweils ab. Dies liefert die reelle Zahl

$$x := 0.x_1x_2x_3x_4\dots, \quad \text{wobei} \quad x_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } a_{n,n} \neq 1 \\ 2 & \text{falls } a_{n,n} = 1 \end{cases};$$

Wo steht x in der Liste? Wäre x an Position n der Liste, so müsste $x_n = a_{n,n}$ sein. Nach Konstruktion ist dies jedoch nicht der Fall. Also steht x *nicht* in unserer Liste. Somit passen die reellen Zahlen **nicht** ins Audinax. □

Es gibt also viiiiiiiiiel mehr reelle als natürliche Zahlen! Entdeckt wurde dieser Sachverhalt von Georg Cantor im Jahr 1871. Die Tatsache, dass es verschiedene Unendlichkeiten gibt, ist eine revolutionäre Entdeckung, und war für viele Mathematiker zunächst schwer zu akzeptieren.

$$\begin{array}{llllll} 1 & 0. & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots \\ 2 & 0. & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots \\ 3 & 0. & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & \cdots \\ 4 & 0. & a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & \cdots \end{array}$$

Abbildung 5: Falls es eine Liste aller reeller Zahlen zwischen 0 und 1 gäbe ...

Kann jede Zahl berechnet werden?

Um zu untersuchen, ob jede Zahl berechnet werden kann, müssen wir uns erst überlegen, wann eine Zahl überhaupt berechenbar heißen soll.

Berechenbarkeit

Wir definieren Berechenbarkeit durch Computerprogramme: Ein **Computerprogramm** ist eine endliche Liste von Symbolen eines entsprechenden Alphabets (z.B. Unicode). Eine Zahl ist **berechenbar**, wenn es ein Computerprogramm gibt, das Schritt für Schritt alle Ziffern der Zahl der Reihe nach ausgibt. Ein Computerprogramm muss nicht unbedingt stoppen, aber jede Ziffer muss nach endlicher Wartezeit ausgegeben werden. Außerdem nehmen wir an, dass wir beliebig viel Speicherplatz zur Verfügung haben (wir lassen uns also nicht von realen Beschränkungen der Hardware ablenken; es geht nur darum, ob etwas überhaupt prinzipiell berechenbar sein könnte oder nicht).

Ist n eine natürliche Zahl, so ist die Dezimaldarstellung von n eine *endliche* Liste von Ziffern. Ein Programm, das diese Liste Schritt für Schritt ausgibt, berechnet somit n. Daher kann jede natürliche Zahl berechnet werden. Außerdem ist jede ganze Zahl berechenbar. Etwas aufwendigere Überlegungen zeigen, dass auch jede rationale Zahl (als Dezimalbruch) berechenbar ist, z.B. ist $\frac{1}{3} = 0.3333333\ldots$.

Auch manche reelle Zahlen, die nicht rational sind, können berechnet werden, zum Beispiel

$$2.2020020002000020000020000002000000002\ldots$$

und $\sqrt{2}$ sowie die Kreiszahl π (Abbildung 6). Aber geht das für **jede** reelle Zahl?!

```
pi = g(1,0,1,1,3,3) where
  g(q,r,t,k,n,l) = if 4*q+r-t<n*t
    then n : g(10*q,10*(r-n*t),t,k,div(10*(3*q+r))t-10*n,l)
    else g(q*k,(2*q+r)*l,t*l,k+1,div(q*(7*k+2)+r*l)(t*l),l+2)
```

Abbildung 6: Ein Programm, das Schritt für Schritt alle Ziffern von π berechnet; aus: J. Gibbons. Unbounded Spigot Algorithms for the Digits of Pi, *The American Mathematical Monthly*, 113(4), pp. 318–328, 2006.

Wie viele Computerprogramme gibt es?

Es gibt nur endlich viele Computerprogramme, die nur aus einem Zeichen bestehen; es gibt nur endlich viele Computerprogramme, die nur aus zwei Zeichen bestehen; es gibt nur endlich viele Computerprogramme, die nur aus drei Zeichen bestehen, ...

Indem wir erst alle Computerprogramme der Länge 1, dann alle der Länge 2, dann alle der Länge 3, ... aufzählen, sehen wir, dass alle Computerprogramme ins Audinax passen.

Kann jede reelle Zahl berechnet werden?

Wir zeigen nun, dass **nicht** jede reelle Zahl berechnet werden kann, da es gar nicht genug Programme geben kann:

Beweis. *Angenommen*, es gäbe für jede reelle Zahl x ein Programm, das x berechnet. Da es mehr reelle Zahlen als Plätze im Audinax gibt, dürften dann auch die Computerprogramme **nicht** ins Audinax passen. Dies steht aber im Widerspruch zu unserer obigen Überlegung. Es kann also **nicht** jede reelle Zahl berechnet werden. $\square$

Zusammenfassung

Es gibt **gleich viele** natürliche, ganze und rationale Zahlen, aber es **viiiiiiel mehr** reelle Zahlen. **Nicht** jede Zahl ist berechenbar: Da es nur so viele Computerprogramme geben kann wie natürliche Zahlen, gibt es reelle Zahlen, die **nicht berechenbar** sind.

Insbesondere zeigt dieses Beispiel, welchen langfristigen Effekt Forschung in der theoretischen Mathematik hat: Das zentrale Argument in der obigen Untersuchung geht auf Überlegungen von Cantor zurück, also lange bevor die ersten Computer überhaupt erdacht/gebaut wurden!

Über Clara Löh

Clara Löh ist in Stuttgart aufgewachsen, hat in Konstanz und Münster Mathematik mit Nebenfach Informatik studiert und 2007 an der WWU Münster promoviert (in algebraischer Topologie, einer Art Geometrie). Danach war sie akademischer Rat auf Zeit in Münster und für ein Semester Vertretungsprofessor in Göttingen.

Seit 2010 ist sie Professor für Mathematik an der Universität Regensburg. In ihrer Forschung kombiniert sie algebraische, graphentheoretische und probabilistische Methoden, um (hoch-dimensionale) geometrische Objekte und ihre Symmetrie zu untersuchen.

Zusammen mit Prof. Dr. Stefan Krauss (Didaktik der Mathematik) organisiert sie den *Schülerzirkel Mathematik* für Schüler ab Klasse 7, mit mathematischen Puzzles aller Art.