Schnittzahlen ebener algebraischer Kurven

Clara Strohm (strohm@math.uni-muenster.de)

19. Juni 2002

In diesem Abschnitt definieren wir eigentliche und transversale Schnitte, sowie Schnittzahlen (die später auch im Satz von Bezout auftreten) zweier ebener Kurven in einem Punkt der affinen Ebene (über einem algebraisch abgeschlossenen Körper). Da die korrekte Definition der Schnittzahlen ein wenig unanschaulich ist, stellen wir zunächst einige Eigenschaften zusammen, die die Schnittzahlen erfüllen sollen. Wir zeigen, dass solche existieren und durch diese Eigenschaften bereits eindeutig charakterisiert sind. Dabei wird sich ausserdem ein Verfahren ergeben, mit dem wir Schnittzahlen konkret berechnen können.

1 Eigenschaften von Schnittzahlen

Im folgenden sei k immer ein algebraisch abgeschlossener Körper.
Wir führen zunächst sieben Eigenschaften auf, die die Schnittzahlen erfüllen sollen:

Definition. Die ebenen algebraischen Kurven F und G **schneiden sich eigentlich im Punkt** P, falls F und G keine gemeinsame Komponente besitzen, die durch P geht.

① Falls sich F und G eigentlich schneiden in P, ist

$$I\,(P, F \cap G) \in \mathbf{N}_{\geq 0}.$$

Schneiden sich F und G nicht eigentlich in P (d.h. besitzen sie eine gemeinsame Komponente, die durch P geht), so ist

$$I\,(P, F \cap G) = \infty.$$

② Es ist

$$I\,(P, F \cap G) = 0 \iff P \notin F \cap G,$$

und die Schnittzahl hängt nur von den Komponenten von F und G ab, die durch P gehen.

③ Ist T ein affiner Koordinatenwechsel auf $\mathbf{A}^2$ und $T(Q) = P$, so ist

$$I\left(Q, F \circ T \cap G \circ T\right) = I\left(P, F \cap G\right).$$

④ (Symmetrie) Es ist

$$I\left(P, F \cap G\right) = I\left(P, G \cap F\right).$$

Definition. Die Kurven F und G **schneiden sich transversal im Punkt** P, wenn

- P ein einfacher Punkt von F und G ist, und
- die Tangente von F in P nicht mit der Tangente von G in P übereinstimmt.

Die fünfte Eigenschaft ist eine Verallgemeinerung von: es ist genau dann $I\left(P, F \cap G\right) = 1$, wenn sich F und G transversal in P schneiden.
⑤ Es ist

$$I\left(P, F \cap G\right) \geq m_P\left(F\right) \cdot m_P\left(G\right),$$

wobei genau dann Gleichheit vorliegt, wenn F und G keine gemeinsamen Tangenten in P besitzen.
Dabei bezeichnen wir mit $m_P\left(F\right)$ bzw. $m_P\left(G\right)$ die Vielfachheit von P in F bzw. G.
⑥ (Additivität) Ist $F = \prod_{i \in \{1,\ldots,m\}} F_i$ und $G = \prod_{j \in \{1,\ldots,n\}} G_j$, so ist

$$I\left(P, F \cap G\right) = \sum_{i,j} I\left(P, F_i \cap G_j\right).$$

⑦ Für alle $S \in k[X,Y]$ ist

$$I\left(P, F \cap G\right) = I\left(P, F \cap \left(G + SF\right)\right).$$

Insbesondere bedeutet dies: ist F irreduzibel, so hängt $I\left(P, F \cap G\right)$ nur vom Bild von G im Koordinatenring $\Gamma\left(F\right)$ ab.

2 Eindeutigkeit der Schnittzahlen

Satz. *Es gibt genau eine Abbildung $I\left(,\cap\right)$, die für alle ebenen Kurven F und G und alle Punkte $P \in \mathbf{A}^2$ definiert ist und die Eigenschaften ① - ⑦ erfüllt.*

Beweis. Sei $I\left(,\cap\right)$ eine Abbildung mit der obigen Eigenschaft, und F, G ebene Kurven, sowie $P \in \mathbf{A}^2$.
Dann genügt es, eine konstruktive Prozedur zur Berechnung von $I\left(P, F \cap G\right)$ anzugeben, die nur die Eigenschaften ① - ⑦ verwendet.
Nach ③ können wir oBdA annehmen, dass $P = (0,0)$ ist. Nach ① können wir ausserdem voraussetzen, dass sich F und G eigentlich in P schneiden, d.h. $I\left(P, F \cap G\right) \in \mathbf{N}_{\geq 0}$. Wir gehen nun induktiv vor:
Induktionsanfang. Der Fall $I\left(P, F \cap G\right) = 0$ ist bereits mit ② abgedeckt.

Induktionsschritt. Sei daher $n := I(P, F \cap G) > 0$, und wir nehmen an, dass wir $I(P, A \cap B)$ durch ① - ⑦ berechnen können, wenn $A, B \in k[X, Y]$ sind mit $I(P, A \cap B) < n$. Wir setzen

$$\begin{aligned} r &:= \deg F(X, 0) \\ s &:= \deg G(X, 0). \end{aligned}$$

Wegen ④ können wir davon ausgehen, dass $r \leq s$ ist. Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

- Sei $r = 0$. Dann gilt $Y \mid F$, denn: Wegen $I(P, F \cap G) > 0$ folgt mit ② insbesondere

  $$0 = F(P) = F(0, 0).$$

  Da $0 = r = \deg F(X, 0)$ ist, erhalten wir also $Y \mid F$.

  Wir schreiben daher $F = Y \cdot H$ mit $H \in k[X, Y]$. Dann liefert ⑥

  $$I(P, F \cap G) = I(P, Y \cap G) + I(P, H \cap G).$$

  Ausserdem ist nach ② auch $G(0, 0) = 0$, d.h. es gibt eine Darstellung

  $$G(X, 0) = X^m \cdot K$$

  mit $m \in \mathbf{N}_{>0}$ und einem Polynom $K \in k[X]$, wobei $K(0) \neq 0$.

  Also erhalten wir mit ⑦, ⑥, ② und ⑤

  $$\begin{aligned} I(P, Y \cap G) &= I(P, Y \cap G(X, 0)) \\ &= I(P, Y \cap X^m) + I(P, Y \cap K) \\ &= I(P, Y \cap X^m) \\ &= m \cdot I(P, Y \cap X) \\ &= m, \end{aligned}$$

  und damit

  $$\begin{aligned} I(P, H \cap G) &= I(P, F \cap G) - I(P, Y \cap G) \\ &= n - m \\ &< n. \end{aligned}$$

  Also können wir $I(P, H \cap G)$ nach Induktionsvoraussetzung durch ① - ⑦ berechnen, und damit auch $I(P, F \cap G) = I(P, H \cap G) + m$.

- Sei $r > 0$. OBdA – nach ② und ⑥ – seien $F(X, 0)$ und $G(X, 0)$ normiert. Wir setzen

  $$H := G - X^{s-r} \cdot F,$$

d.h. $\deg H(X,0) < \deg G(X,0)$ und (unter Verwendung von ⑦)

$$\begin{aligned} I(P, F\cap G) &= I\left(P, F\cap H + X^{s-r}\cdot F\right) \\ &= I(P, F\cap H). \end{aligned}$$

Nach endlich vielen solchen Schritten erhalten wir also Polynome $A, B \in k[X,Y]$ mit $\deg A(X,0) = 0$ und

$$I(P, F\cap G) = I(P, A\cap B).$$

Auf A und B ist dann der erste Fall anwendbar.

Also ist die Schnittzahl durch die Eigenschaften ① - ⑦ eindeutig charakterisiert. □

3 Existenz der Schnittzahlen

Definition. Seien F und G ebene Kurven und P ein Punkt der affinen Ebene. Dann setzen wir

$$I(P, F\cap G) := \dim_k\left(\mathcal{O}_P\left(\mathbf{A}^2\right)/(F,G)\right).$$

Satz. *Die so definierte Abbildung $I(,\cap)$ erfüllt die Eigenschaften ① - ⑦.*

Beweis. Seien $F, G \in k[X,Y]$ und $P \in \mathbf{A}^2$.
④ folgt direkt aus der Definition, da $(F,G) = (G,F)$ ist.
⑦ Für alle $S \in k[X,Y]$ ist $(F,G) = (F, G+SF)$, woraus ⑦ folgt.
② Es ist genau dann $0 = I(P, F\cap G) = \dim_k(\mathcal{O}_P(\mathbf{A}^2)/(F,G))$, wenn $(F,G) = \mathcal{O}_P(\mathbf{A}^2)$ ist. Dies ist äquivalent dazu, dass $B, C \in \mathcal{O}_P(\mathbf{A}^2)$ existieren mit (in $\mathcal{O}_P(\mathbf{A}^2)$)

$$B\cdot F + C\cdot G = 1,$$

bzw. zu $F(P) \neq 0$ oder $G(P) \neq 0$.
Ausserdem hängt $I(P, F\cap G)$ nur von den Komponenten ab, die durch P gehen, denn: Ist $F = F_1 \cdot F_2$ mit

$$F_1(P) = 0 \text{ und } F_2(P) \neq 0,$$

so ist $1/F_2 \in \mathcal{O}_P(\mathbf{A}^2)$, und damit

$$(F,G) = (F_1, G).$$

Also gilt ②.
③ Nach Aufgabe (2.22) von [Fu] induzieren affine Koordinatentransformationen Isomorphismen der lokalen Ringe, d.h. insbesondere folgt ③.
Sei also oBdA $P = (0,0)$, und alle Komponenten von F und G gehen durch P. Wir schreiben im folgenden

$$\mathcal{O} := \mathcal{O}_P\left(\mathbf{A}^2\right).$$

① Haben F und G keine gemeinsamen Komponenten, so ist $V(F,G)$ endlich, denn:

Lemma 1. *Haben F und G keine gemeinsamen Komponenten, so ist $V(F,G)$ endlich.*

Beweis. Da F und G keine gemeinsamen Faktoren in $k[X][Y]$ besizten, haben sie auch keinen gemeinsamen Teiler in $k(X)[Y]$. Da $k(X)[Y]$ ein nullteilerfreier Hauptidealring ist, ist $(F,G)=1$ in $k(X)[Y]$, d.h. es existieren $R,S \in k(X)[Y]$ mit

$$RF + SG = 1.$$

Dann gibt es ein Polynom $D \in k[X] \setminus \{0\}$, so dass $A := DR \in k[X,Y]$ und $B := DS \in k[X,Y]$. Also ist

$$AF + BG = DRF + DSG = D.$$

Ist nun $(a,b) \in V(F,G)$, so ist daher auch $D(a) = 0$. Da D nur eine endliche Menge von Nullstellen besitzt, können in $V(F,G)$ nur endlich viele X-Koordinaten auftreten. Analog folgt dies auch für die Y-Koordinaten, d.h $V(F,G)$ ist endlich. □

Also ist $V(F,G)$ endlich, und damit ist nach Kapitel 2, Proposition 6, Korollar 1 auch

$$I\left(P, F \cap G\right) < \infty.$$

Haben F und G eine gemeinsamen Komponente H (also eine, die durch P geht), so ist $(F,G) \subset (H)$, d.h. es existiert ein surjektiver Homomoprhismus

$$\mathcal{O}/(F,G) \longrightarrow \mathcal{O}/(H).$$

Daher ist

$$\begin{aligned} I\left(P, F \cap G\right) &= \dim_k \mathcal{O}/(F,G) \\ &\geq \dim_k \mathcal{O}/(H). \end{aligned}$$

Nach Aufgabe (2.44) in [Fu] ist $\mathcal{O}/(H) \cong \mathcal{O}_P\left(H\right) \supset \Gamma\left(H\right)$. Da H nicht konstant ist, ist $V(H)$ unendlich:

Lemma 2. *Sei $H \in k[X,Y] \setminus k$. Dann ist die Nullstellenmenge $V(H)$ unendlich.*

Beweis. Da k algebraisch abgeschlossen ist, ist k insbesondere unendlich. Wir schreiben

$$H = \sum_{j \in \{0,\ldots,r\}} F_j \cdot Y^j$$

mit $F_0, \ldots F_r \in k[X]$ und $F_r \neq 0$. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

- Sei $r = 0$. Da $H = F_0$ nicht konstant ist (und k algebraisch abgeschlossen ist), existiert ein $x \in k$ mit $F_0(x) = 0$. Also ist

  $$\forall_{y \in k} \quad H(x,y) = F_0(x) = 0,$$

  und damit ist $V(H)$ insbesondere unendlich.

- Sei $r > 0$. Dann gibt es (wegen $F_r \neq 0$) natürlich nur endlich viele $x \in k$ mit
$$F_1(x) = \dots F_r(x) = 0,$$
d.h. für fast alle $x \in k$ ist $H(x, Y) \in k[Y]$ nichtkonstant. Da k algebraisch abgeschlossen ist, existiert also für fast alle $x \in k$ ein $y \in k$ mit $H(x, y) = 0$. Also ist $V(H)$ unendlich. □

D.h. das Korollar 4 des Hilbertschen Nullstellensatzes liefert $\dim_k \Gamma(H) = \infty$. Daher ist auch
$$I(P, F \cap G) \geq \infty,$$
womit ① gezeigt ist.
⑥ OBdA besitzen F und $G \cdot H$ keine gemeinsamen Komponenten (denn sonst haben bereits F und G oder F und H eine gemeinsame Komponente, woraus mit ① die Additivität folgt).
Sei $\varphi \colon \mathcal{O}/(F, GH) \longrightarrow \mathcal{O}/(F, G)$ der natürliche Epimorphismus. Aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O} \arrow[r, "\cdot G"] \arrow[d, two heads] & \mathcal{O} \arrow[r, two heads] & \mathcal{O}/(F, GH) \\ \mathcal{O}/(F, H) \arrow[urr, dashed, "\psi"'] & & \end{tikzcd}$$

(von k-Vektorräumen und Vektorraumhomomorphismen) erhalten wir den k-Vektorraumhomomorphismus
$$\psi \colon \mathcal{O}/(F, H) \longrightarrow \mathcal{O}/(F, GH)$$
Um die Additivität nachzuweisen genügt es also zu zeigen, dass die Folge
$$0 \longrightarrow \mathcal{O}/(F, H) \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}/(F, GH) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}/(F, G) \longrightarrow 0$$
(von k-Vektorräumen) exakt ist:

- Nach Konstruktion ist φ surjektiv.
- Ausserdem ist nach Konstruktion
$$\begin{aligned} \ker \varphi &= (F, G)/(F, GH) \\ &= (F) + (G)/(F, GH) \\ &\cong (G)/(F, GH) \\ &= \operatorname{im} \psi. \end{aligned}$$

- Und ψ ist injektiv, denn: Sei $z + (F, H) \in \ker\psi$, d.h. es existieren $u, v \in \mathcal{O}$ mit

  $$Gz = uF + vGH.$$

  Sei $S \in k[X, Y]$ mit $S(P) \neq 0$. Dann setzen wir

  $$\begin{aligned} A &:= S \cdot u \\ B &:= S \cdot v \\ C &:= S \cdot z. \end{aligned}$$

  Also ist (in $k[X, Y]$)

  $$\begin{aligned} G \cdot (C - BH) &= G \cdot (Sz - SvH) \\ &= SGz - SvGH \\ &= SuF \\ &= AF. \end{aligned}$$

  Da F und G keine gemeinsamen Faktoren besitzen, folgt $F \mid C - BH$, d.h. es existiert ein $D \in k[X, Y] \setminus k$ mit

  $$C - BH = DF.$$

  Also ist

  $$Sz = C = BH + DF.$$

  Wegen $S(P) \neq 0$ erhalten wir damit in $\mathcal{O}$

  $$z = (B/S) \cdot H + (D/S) \cdot F \in (F, H) \cdot \mathcal{O},$$

  d.h. ψ ist injektiv.

Damit ist die Exaktheit und daher auch ⑥ gezeigt.
⑤ Diese Eigenschaft ist am hartnäckigsten: Im folgenden schreiben wir

$$m := m_P(F) \text{ und } n := m_P(G).$$

Weiter sei $I := (X, Y) \cdot k[X, Y]$. Wir betrachten das untenstehende Diagramm von k-Vektorräumen (und k-linearen Abbildungen):

$$\begin{tikzcd} k[X,Y]/I^n \times k[X,Y]/I^m \arrow[r, "\psi"] & k[X,Y]/I^{m+n} \arrow[r, two heads, "\varphi"] & k[X,Y]/(I^{m+n}, F, G) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\ & \mathcal{O}/(F,G) \arrow[r, two heads, "\pi"] & \mathcal{O}/(I^{m+n}, F, G) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Dabei seien φ, π, α gegeben durch die natürlichen Ringhomomorphismen, und ψ sei gegeben durch

$$(A + I^n, B + I^m) \longmapsto A \cdot F + B \cdot G + I^{m+n}.$$

Dies ist wegen $P = (0,0)$ und nach Definition von m und n wohldefiniert. Offensichtlich sind φ und π surjektiv. Wegen

$$\{P\} \subset V(I^{m+n}, F, G) \subset V(I^{m+n}) = \{(0,0)\} = \{P\}$$

ist nach Kapitel 2, Proposition 6, Korollar 2 in [Fu] auch α ein Isomorphismus. Mit

$$\begin{aligned} \operatorname{im}\psi &= \{AF + BG | A, B \in k[X,Y]\}/I^{m+n} \\ &= \big(I^{m+n} + (F,G)\big)/I^{m+n} \\ &= (I^{m+n}, F, G)/I^{m+n} \\ &= \ker\phi \end{aligned}$$

erhalten wir also, dass die obere Zeile exakt ist. Damit liefert das Diagramm

$$\begin{aligned} I\,(P, F \cap G) &= \dim_k(\mathcal{O}/(F,G)) \\ &\geq \dim_k(k[X,Y]/I^{m+n}) \\ &= \dim_k(k[X,Y]/I^{m+n}, F, G) \\ &\geq \dim_k(k[X,Y]/I^{m+n}) - \dim_k(k[X,Y]/I^{n}) - \dim_k(k[X,Y]/I^{m}) \\ &= \frac{(m+n)\cdot(m+n+1)}{2} - \frac{n\cdot(n+1)}{2} - \frac{m\cdot(m+1)}{2} \\ &= m \cdot n. \end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichheit gilt dabei nach Aufgabe (2.46) in [Fu]. Insbesondere ist damit der erste Teil von ⑤ gezeigt. Ausserdem folgt: Es ist genau dann $I\,(P, F \cap G) = nm$, wenn π ein Isomorphismus und ψ ein Monomorphismus ist. Also folgt ⑤ aus:

Lemma 3. *Es gelten:*

1. *Haben F und G keine gemeinsame Tangente in P, so ist*

$$\forall_{t \in \mathbf{N}_{\geq m+n-1}} \quad I^t \subset (F,G) \cdot \mathcal{O}.$$

2. *Der Homomorphismus ψ ist genau dann injektiv, wenn F und G keine gemeinsame Tangente in P besitzen.*

Beweis. 1. Seien $L_1, \ldots, L_m$ die Tangenten zu F in P und $M_1, \ldots, M_n$ die Tangenten zu G in P. Dann setzen wir

$$\forall_{i \in \mathbf{N}_{>m}} \quad L_i := L_m \text{ und } \forall_{j \in \mathbf{N}_{>n}} \quad M_j := M_n,$$

sowie

$$\forall_{i,j \in \mathbf{N}} \quad A_{ij} := L_1 \cdots L_i \cdot M_1 \cdots M_j.$$

Nach Aufgabe (2.35)(c) aus [Fu] bildet dann (zu $t \in \mathbf{N}_{\geq m+n-1}$) die Menge $\{A_{ij} | i+j = t\}$ eine Basis des Vektorraums aller Formen vom Grad t in $k[X,Y]$. Seien nun $i, j \in \mathbf{N}$ mit $i + j = t$. Es genügt zu zeigen, dass $A_{ij} \in (F,G) \cdot \mathcal{O}$ ist: Sei oBdA $i \geq m$.

Also ist

$$A_{ij} = A_{m,0} \cdot B,$$

wobei B eine Form vom Grad $d := i + j - m$ ist. Weiter ist

$$F = A_{m,0} + F',$$

wobei in F' nur Terme vom Grad $\geq m + 1$ auftreten. Damit erhalten wir

$$A_{ij} = BF - BF'$$

und jeder Term in BF' ist vom Grad $\geq i + j + 1$. Also genügt es zu zeigen, dass I^d für alle grossen d in (F, G) enthalten ist:
Dazu verwenden wir den Hilbertschen Nullstellensatz; da F und G keine gemeinsamen Komponenten besitzen, ist $V(F, G)$ endlich, etwa

$$V(F, G) = \{P, Q_1, \dots, Q_s\}.$$

Wir wählen ein Polynom $H \in k[X, Y]$ derart, dass

$$H(P) \neq 0 \text{ und } \forall_{\ell \in \{1,\dots,s\}} \quad H(Q_\ell) = 0$$

ist. Daher sind $HX, HY \in I(V(F, G))$, d.h. der Hilbertsche Nullstellensatz liefert ein $N \in \mathbf{N}$ mit

$$(HX)^N, (HY)^N \in (F, G).$$

Nach Konstruktion ist H^N eine Einheit in $\mathcal{O}$, d.h. es ist bereits $X^N, Y^N \in (F, G)\mathcal{O}$, und daher

$$I^{2N} \subset (F, G)\mathcal{O}.$$

Damit ist der erste Teil gezeigt.
2. Seien zunächst alle Tangenten verschieden und $\psi([A], [B]) = [AF + BG] = 0$, d.h. $AF + BG$ besteht nur aus Termen vom Grad $\geq m + n$. Dabei seien die Vertreter A und B so gewählt, dass

$$\deg A \leq n \text{ und } \deg B \leq m.$$

Wir schreiben $A = A_r + \tilde{A}$, wobei $\tilde{A}$ der Anteil von höherem Grad ist, und analog $B = B_s + \tilde{B}$. Also ist

$$AF + BG = A_r F_m + B_s G_n + \dots.$$

Damit folgt $r + m = s + n$ und $A_r F_m = -B_s G_n$. Da die Tangenten verschieden sind, haben F_m und G_n keinen gemeinsamen Teiler, d.h.

$$F_m \mid B_s \text{ und } G_n \mid A_r.$$

Insbesondere ist also $s \geq m$ und $r \geq n$ (bzw. $s = m$ und $r = n$) und damit $[A] = 0$ und $[B] = 0$. Sei andersherum L eine gemeinsame Tangente von F und G in P. Also erhalten wir Darstellungen

$$F_m = L \cdot F'_{m-1} \text{ und } G_n = L \cdot G'_{n-1}$$

mit $\deg F'_{m-1} = m-1$ und $\deg G'_{n-1} = n-1$. Also ist $[F'_{m-1}] \neq 0$ und $[G'_{n-1}] \neq 0$, aber (mit Zerlegungen $F = F_m + \tilde{F}, G = G_n + \tilde{G}$, sowie $F_m = LF'_{m-1}, G_n = LG'_{n-1}$)

$$\begin{aligned}\psi([G'_{n-1}], -[F'_{m-1}]) &= [G'_{n-1}F - F'_{m-1}G] \\ &= G_nF'_{m-1} + G'_{n-1}\tilde{F} - F'_{m-1}G_n - F'_{m-1}\tilde{G} \\ &= G'_{n-1}\tilde{F} - F'_{m-1}\tilde{G},\end{aligned}$$

was aus Gradgründen verschwindet. D.h. ψ ist nicht injektiv. □

Damit ist das Lemma – und somit auch der Existenzsatz – bewiesen. □

4 Weitere Eigenschaften

Die so definierten Schnittzahlen besitzen ausserdem noch die folgenden Eigenschaften:
⑧ Ist P ein einfacher Punkt von F, so ist

$$I(P, F \cap G) = \mathrm{ord}_P^F(G).$$

Dabei bezeichnen wir mit $\mathrm{ord}_P^F(G)$ die Ordnung von G in dem diskreten Bewertungsring $\mathcal{O}_P(V(F))$.

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass F irreduzibel ist. Sei $n := \mathrm{ord}_P^F(G)$ und L eine Gerade durch P, die nicht die Tangente von F in P ist. Nach Kapitel 2, Theorem 1 in [Fu] ist dann das Bild ℓ von L in $\mathcal{O}_P(V(F))$ ein lokaler Parameter, d.h. es existieren $g, h \in \Gamma(F)$ mit $g(P) \neq 0 \neq h(P)$ und (in $\mathcal{O}_P(F)$)

$$G = \frac{g}{h} \cdot \ell^n,$$

bzw. (in $k[X,Y]$)

$$G \cdot (h + aF) = (g + bF) \cdot L^n$$

für gewisse $a, b \in k[X,Y]$. Dann erhalten wir mit den Eigenschaften ①-⑦ (da $g(P) \neq 0 \neq h(P)$)

$$\begin{aligned}I(P, F \cap G) &= I(P, F \cap G) + 0 \\ &= I(P, F \cap G) + I(P, F \cap h + aF) \\ &= I(P, F \cap G \cdot (h + aF)) \\ &= I(P, F \cap (g + bF) \cdot L^n) \\ &= I(P, F \cap g) + I(P, F \cap L^n) \\ &= 0 + I(P, F \cap L^n).\end{aligned}$$

Da L nicht die Tangente von F in P ist, schneiden sich F und L transversal in P, d.h. mit ⑤ folgt

$$I(P, F \cap G) = n \cdot 1 = \mathrm{ord}_P^F(G).$$ □

⑨ Besitzen F und G keine gemeinsamen Komponenten, so ist

$$\sum_{P\in\mathbf{A}^2} I\left(P, F\cap G\right) = \dim_k\left(k[X,Y]/(F,G)\right).$$

Beweis. Nach Lemma 1 ist $V(F,G)$ endlich. Also folgt die Behauptung direkt aus Korollar 1 von Proposition 6 im zweiten Kapitel von [Fu]. □

5 Beispiele

Beispiel. Wir betrachten die Kurven

$$\begin{aligned} E &:= (X^2+Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3 \\ F &:= (X^2+Y^2)^3 - 4X^2Y^2, \end{aligned}$$

und berechnen $I\left(P, E\cap F\right)$ für $P := (0,0)$: Es ist

$$\begin{aligned} F - (X^2+y^2)\cdot E &= Y\big((X^2+Y^2)(Y^2-3X^2) - 4X^2Y\big) \\ &=: Y\cdot G, \end{aligned}$$

d.h. mit ⑦ erhalten wir $I\left(P, E\cap F\right) = I\left(P, E\cap YG\right)$. Wir berechnen nun zunächst $I\left(P, E\cap G\right)$: Es ist

$$\begin{aligned} G + 3E &= Y\big(5X^2 - 3Y^2 + 4Y^3 + 4X^2Y\big) \\ &=: Y\cdot H, \end{aligned}$$

d.h. ⑦ liefert

$$I\left(P, E\cap F\right) = 2\cdot I\left(P, E\cap Y\right) + I\left(P, E\cap H\right).$$

Mit ⑦ und ⑥ erhalten wir

$$I\left(P, E\cap Y\right) = I\left(P, X^4\cap Y\right) = 4$$

bzw. mit ⑤

$$I\left(P, E\cap H\right) = m_P\left(E\right)\cdot m_P\left(H\right) = 6,$$

und damit $I\left(P, E\cap F\right) = 14$.

Beispiel. Wir betrachten nun die Kurven

$$\begin{aligned} A &:= Y - X^2 \\ C &:= Y^2 - X^3, \end{aligned}$$

und berechnen $I\left(P, A\cap C\right)$ in $P := (0,0)$: Es ist (nach ⑦ und ⑥)

$$\begin{aligned} I\left(P, A\cap C\right) &= I\left(P, (Y-X^2)\cap(Y^2-X^3)\right) \\ &= I\left(P, (Y-X^2)\cap(Y^2-X^3-X(Y-X^2))\right) \\ &= I\left(P, (Y-X^2)\cap Y^2 - XY\right) \\ &= I\left(P, (Y-X^2)\cap Y\right) + I\left(P, (Y-X^2)\cap(Y-X)\right). \end{aligned}$$

Dabei ist (nach ⑦, ⑥ und ⑤)

$$\begin{aligned} I\left(P, (Y - X^2) \cap Y\right) &= I\left(P, X^2 \cap Y\right) \\ &= 2 \cdot I\left(P, X \cap Y\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

und (mit ⑦, ⑥, ⑤ und ②)

$$\begin{aligned} I\left(P, (Y - X^2) \cap (Y - X)\right) &= I\left(P, (X - X^2) \cap (Y - X)\right) \\ &= I\left(P, X \cap Y - X\right) + I\left(P, (1 - X) \cap Y - X\right) \\ &= 1 + 0. \end{aligned}$$

Also folgt insgesamt $I\left(P, A \cap C\right) = 3 + 1 = 3$.

6 Anhang

6.1 Verwendete Übungsaufgaben

Lemma 4. ([Fu, Aufgabe (2.22)]) *Sei $T\colon \mathbf{A}^2 \longrightarrow \mathbf{A}^2$ ein affiner Koordinatenwechsel mit $T(P) = Q$. Dann ist*

$$\circ T\colon \mathcal{O}_Q\left(\mathbf{A}^2\right) \longrightarrow \mathcal{O}_P\left(\mathbf{A}^2\right)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Dass $\circ T$ ein wohldefinierter Ringhomomorphismus ist, ist klar. Da T ein affiner Koordinatenwechsel ist, gibt es eine Darstellung

$$T = (X, Y) \cdot A + c$$

mit einer invertierbaren Matrix $A \in k^{2\times 2}$ und einem $c \in k^2$. Daraus erhalten wir den inversen affinen Koordinatenwechsel

$$T^{-1} = (X, Y) \cdot A^{-1} - c \cdot A^{-1}.$$

Insbesondere ist $\circ T^{-1}$ das Inverse zu $\circ T$. □

Lemma 5. ([Fu, Aufgabe (2.44)]) *Sei V eine Varietät in $\mathbf{A}^2, I := I(V)$ und $P \in V$. Weiter sei $J \subset k[X, Y]$ ein Ideal, das I enthält und J' das Bild von J im Koordinatenring $\Gamma\left(V\right) = k[X, Y]/I$. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\mathcal{O}_P\left(\mathbf{A}^2\right)/J \cdot \mathcal{O}_P\left(\mathbf{A}^2\right) \longrightarrow \mathcal{O}_P\left(V\right)/J' \cdot \mathcal{O}_P\left(V\right).$$

Beweis. Die kanonische Abbildung $k[X, Y] \longrightarrow k[X, Y]/I = \Gamma\left(V\right)$ induziert einen surjektiven Homomorphismus $\mathcal{O}_P\left(\mathbf{A}^2\right) \longrightarrow \mathcal{O}_P\left(V\right)$. Die Komposition mit der Quotientenabbildung liefert also einen surjektiven Homomorphismus

$$\varphi\colon \mathcal{O}_P\left(\mathbf{A}^2\right) \longrightarrow \mathcal{O}_P\left(V\right)/J' \cdot \mathcal{O}_P\left(V\right).$$

Nach Definition von J' (wegen $I \subset J$ ist J auch das Urbild von J') ist dabei

$$\ker \varphi = J \cdot \mathcal{O}_P\left(\mathbf{A}^2\right),$$

d.h. wir erhalten einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathcal{O}_P\left(\mathbf{A}^2\right)/J \cdot \mathcal{O}_P\left(\mathbf{A}^2\right) \longrightarrow \mathcal{O}_P\left(V\right)/J' \cdot \mathcal{O}_P\left(V\right).$$

□

Korollar. *Insbesondere gilt für jedes irreduzible Polynom $H \in k[X,Y]$, dass*

$$\mathcal{O}_P\left(\mathbf{A}^2\right)/(H) \cdot \mathcal{O}_P\left(\mathbf{A}^2\right) \cong \mathcal{O}_P\left(V(H)\right)$$

ist. □

Lemma 6. ([Fu, Aufgabe (2.46)]) *Für alle $n \in \mathbf{N}$ ist (mit $I := (X,Y)$)*

$$\dim_k k[X,Y]/I^n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Beweis. Es ist

$$k[X,Y]/I^n = \{f \in k[X,Y] |\deg f < n\}.$$

Dies wird als k-Vektorraum offensichtlich linear unabhängig erzeugt durch dir Polynome

$$\begin{array}{r} 1, \\ X, Y \\ X^2, XY, Y^2 \\ \vdots \end{array}$$

Dies sind genau

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Basiselemente, woraus die Behauptung folgt. □

Lemma 7. ([Fu, Aufgabe (2.35)(c)]) *Seien $(L_i)_{i \in \mathbf{N}}$ und $(M_j)_{j \in \mathbf{N}}$ lineare Formen in $k[X,Y]$, so dass*

$$\forall_{i,j \in \mathbf{N}} \quad \forall_{\lambda \in k} \quad L_i \neq \lambda \cdot M_j.$$

Weiter sei $d \in \mathbf{N}$ und

$$A_{ij} := L_1 \cdots L_i \cdot M_1 \cdots M_j.$$

Dann bildet die Menge $A^d := \{A_{ij} | i,j \in \mathbf{N} \text{ mit } i+j=d\}$ eine k-Vektorraumbasis des Raumes V aller Formen vom Grad d in $k[X,Y]$.

Beweis. Es ist $\dim_k V = d+1$, da die Polynome $X^d, X^{d-1}Y, \ldots Y^d$ offenbar eine k-Basis von V bilden. Nach Konstruktion besitzt auch A^d genau $d+1$ Elemente. Es genügt also zu zeigen, dass V über k von A^d erzeugt wird: Dies zeigen wir durch vollständige Induktion über d. Nach Voraussetzung gibt es zu allen $i, j \in \mathbf{N}$ Konstanten $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij} \in k$ mit

$$\begin{aligned} X &= a_{ij} L_i + b_{ij} M_j \\ Y &= c_{ij} L_i + d_{ij} M_j, \end{aligned}$$

d.h. insbesondere gilt die Behauptung im Fall $d = 1$. Den Induktionsschritt erhalten wir aus (und analog für Y)

$$\begin{aligned} \forall_{i,h\in\mathbf{N}} \quad X \cdot A_{ij} &= (a_{i+1,j+1} L_{i+1} + b_{i+1,j+1} M_{j+1}) \cdot A_{ij} \\ &= a_{i+1,j+1} \cdot A_{i+1,j} + b_{i+1,j+1} \cdot A_{i,j+1}. \end{aligned}$$

Also wird V als k-Vektorraum von A^d erzeugt. □

6.2 Verwendete Sätze

Korollar. ([Fu, Hilbertscher Nullstellensatz, Korollar 4]) *Sei $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal. Dann ist $V(I)$ genau dann endlich, wenn $\dim_k k[X_1, \ldots, X_n]/I$ endlich ist. Wenn dies eintritt, ist*

$$|V(I)| \leq \dim_k k[X_1, \ldots, X_n]/I.$$

Satz. ([Fu, Kapitel 2, Proposition 6]) *Sei I ein Ideal in $k[X_1, \ldots, X_n]$ mit endlicher Nullstellenmenge $V(I)$, etwa $V(I) = \{P_1, \ldots, P_N\}$. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$k[X_1, \ldots, X_n]/I \longrightarrow \prod_{j\in\{1,\ldots,N\}} \mathcal{O}_j / I \cdot \mathcal{O}_j,$$

wobei

$$\forall_{j\in\{1,\ldots,N\}} \quad \mathcal{O}_j := \mathcal{O}_{P_j}\left(\mathbf{A}^n\right).$$

Korollar. ([Fu, Kapitel 2, Proposition 6, Korollar 1]) *In obiger Situation ist*

$$\dim_k k[X_1, \ldots, X_n]/I = \sum_{j\in\{1,\ldots,N\}} \dim_k \mathcal{O}_j / I \cdot \mathcal{O}_j.$$

Korollar. ([Fu, Kapitel 2, Proposition 6, Korollar 2]) *Ist $V(I) = \{P\}$, so ist*

$$k[X_1, \ldots, X_n]/I \cong \mathcal{O}_P\left(\mathbf{A}^n\right) / I \cdot \mathcal{O}_P\left(\mathbf{A}^n\right).$$

Literatur

[Fu] Fulton, W. *Algebraic Curves*