

# *(In)Varianten*

*Warum Drachen überleben und Ufos kollidieren*

Clara Löh

September 2008

*Invarianten sind einfache mathematische Objekte (z.B. Zahlen) oder Eigenschaften, die sich unter gewissen Operationen nicht oder nur kontrolliert verändern; eine interessante Invariante ist etwa die Winkelsumme von Polygonen. Die Kunst besteht nun darin, Invarianten zu entdecken, die einfach zu berechnen sind, aber dennoch genug Information über das betrachtete Problem enthalten.*

*In diesem Vortrag wird das Prinzip der Invarianten an elementaren Beispielen illustriert und es wird ein Ausblick auf Invarianten in der modernen Mathematik gegeben.*

## *1 Was sind Invarianten?*

Invarianten sind einfache mathematische Objekte (z.B. Zahlen) oder Eigenschaften, die sich unter gewissen Operationen auf den betrachteten Objekten nicht oder nur kontrolliert verändern. Invarianten übersetzen Probleme somit in Fragestellungen, die – bei geeigneter Wahl der Invariante – einfacher zu lösen sind als das Ausgangsproblem.

Zum Beispiel ändert sich der Rest bei Division durch 2 nicht, wenn wir eine natürliche Zahl quadrieren – der Rest bei Division durch 2 ist also für natürliche Zahlen eine Invariante bezüglich Quadrieren. Diese einfache Tatsache kann man unter anderem dazu verwenden, zu zeigen, daß  $\sqrt{2}$  keine rationale Zahl ist, also nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen geschrieben werden kann.

Invarianten in diesem klassischen Sinne spielen vor allem in Induktionsbeweisen, der Spieltheorie und in der Informatik (bei der Konstruktion bzw. beim Beweis der Korrektheit von Algorithmen) eine Rolle.

In der modernen Mathematik hat sich das Prinzip der Invarianten zu einem mächtigen Werkzeug weiterentwickelt. In Abschnitt 3 geben wir

einen Einblick in das Prinzip der Invarianten in der modernen Mathematik, in Form von Kategorien und Funktoren. Im letzten Abschnitt betrachten wir ein Beispiel für eine sehr starke solche Invariante, sogenannte Homologie von topologischen Räumen, und zeigen, wie man mit dieser Invariante den Brouwerschen Fixpunktsatz herleiten kann.

## 2 Warum Drachen überleben und Ufos kollidieren

Im folgenden illustrieren wir das Prinzip der Invarianten an ein paar kleinen Beispielen (Abschnitte 2.1 bis 2.3) und geben außerdem Beispiele fundamentaler mathematischer Invarianten (Abschnitt 2.4).

### 2.1 Warum Drachen überleben ...

**Beispiel (2.1)** (Der hundertköpfige Drache [3]). *Ein Drache habe 100 Köpfe. Ein Ritter kann jeweils auf einen Streich 15, 17, 20 oder 5 Köpfe abschlagen – dann wachsen aber jeweils 24, 2, 14 bzw. 17 Köpfe nach. Kann der Ritter alle Köpfe des Drachen abschlagen?*

*Lösung.* Um einen geeigneten Kandidaten für eine Invariante zu finden, beobachten wir zunächst, was passiert, wenn der Ritter in Aktion tritt: Schlägt der Ritter dem Drachen 15 Köpfe ab, so wachsen 24 neue Köpfe nach, die Anzahl der Köpfe ändert sich also um  $-15 + 24 = 9$ ; bei den anderen drei Varianten ergeben sich folgende Änderungen in der Anzahl der Köpfe:

$$-17 + 2 = -15,$$

$$-20 + 14 = -6,$$

$$-5 + 17 = 12.$$

Diese Differenzen sind alle Vielfache von 3. Also kann der Ritter die die Anzahl der Köpfe des Drachen „modulo 3“, d.h. den Rest der Anzahl der Köpfe bei Division durch 3, nicht verändern. Mit anderen Worten: **Die Anzahl der Köpfe modulo 3 ist eine Invariante!**

Damit der Ritter gewinnen kann, muß er die Anzahl der Köpfe auf 15, 17, 20 oder 5 reduzieren. Zu Beginn hat der Drache 100 Köpfe. Da 100

bei Division durch 3 aber nicht denselben Rest hat wie 15, 17, 20 oder 5, kann es keine Abfolge geben, mit der der Ritter dem Drachen alle Köpfe abschlagen kann.  $\square$

Ähnlich kann man auch das folgende Problem lösen:

**Aufgabe (2.2)** (Das MU-Puzzle [4]). Auf Zeichenketten bestehend aus den Symbolen M, I und U seien die folgenden Operationen erlaubt:

- Endet die Zeichenkette auf I, so darf ein U angehängt werden:  $xI \rightarrow xIU$ .
- Die Zeichenkette nach dem M darf verdoppelt werden:  $Mx \rightarrow Mxx$ .
- Drei aufeinanderfolgende I dürfen durch ein U ersetzt werden:  $xIIIy \rightarrow xUy$ .
- Zwei aufeinanderfolgende U können gelöscht werden:  $xUUy \rightarrow xy$ .

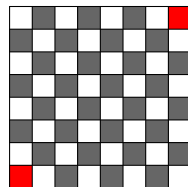
Ist es möglich, mit den obigen Operationen, die Zeichenkette MI in die Zeichenkette MU zu verwandeln?

## 2.2 ... und Ufos kollidieren

**Beispiel (2.3)** (Der Ufoparkplatz). Vor einem galaktischen Supermarkt ist ein quadratischer Parkplatz, der (wie ein Schachbrett) in  $8 \times 8$  quadratische Felder aufgeteilt ist. Zwei diagonal gegenüberliegende Eckfelder sind bereits durch zwei Ufos der Größe  $1 \times 1$  belegt.

Können auf den verbleibenden 62 Feldern 31 Ufos der Größe  $2 \times 1$  parken ohne zu kollidieren?

*Lösung.* Um einen besseren Eindruck davon zu bekommen, welche Möglichkeiten es gibt, die 31 Ufos auf die verbleibenden Plätze zu verteilen, färben wir die Felder des Parkplatzes wie ein Schachbrett; die roten Felder sind dabei die bereits belegten Eckfelder:



Jedes  $2 \times 1$ -Ufo belegt bei dieser Färbung genau ein weißes und ein schwarzes Feld. **Wenn  $2 \times 1$ -Ufos kollisionsfrei auf dem Parkplatz parken, belegen sie also genauso viele weiße wie schwarze Felder!**

Da von den freien 62 Feldern aber 32 weiß und nur 30 schwarz sind, können die 31 Ufos nicht kollisionsfrei auf dem Parkplatz parken.  $\square$

**Aufgabe (2.4).** Was passiert auf einem  $9 \times 9$ -Parkplatz? Verallgemeinern Sie!

### 2.3 Nochmal der Ritter und der Drache

Da der Ritter den Drachen nicht erschlagen kann (s. Problem (2.1)), verabreden sich die beiden zu einem weiteren Duell:

**Beispiel (2.5)** (Nochmal der Ritter und der Drache [2]). Auf einem rechteckigen karierten Papier spielen der Ritter und der Drache folgendes Spiel: Die beiden ziehen abwechselnd, der Ritter beginnt. Ein Zug besteht darin, von einem Kästchen, eine waagerechte oder senkrechte Kante einzufärben – der Ritter verwendet blau, der Drache grün.

Ziel des Ritters ist es, eine geschlossene blaue Kurve zu erzeugen; Ziel des Drachen ist es, dies zu verhindern. Wer gewinnt?

*Lösung.* Wir versuchen zunächst, ein charakteristisches Merkmal geschlossener blauer Kurven zu entdecken: Betrachten wir von den am weitesten rechts liegenden Ecken einer solchen geschlossenen blauen Kurve die rechte untere Ecke, so stellen wir fest, dass die Kurve dort die Form  $\lrcorner$  hat. Damit der Ritter gewinnen kann, muß er also zumindest ein  $\lrcorner$  erzeugen.

Aber genau das kann der Drache verhindern: Zieht der Ritter  $\_$  und ist die rechte senkrechte Kante noch frei, so ergänzt dies der Drache zu  $\lrcorner$ . Zieht der Ritter  $\lrcorner$  und ist die untere waagerechte Kante noch frei, so ergänzt dies der Drache zu  $\_$ . Also wird nie ein  $\lrcorner$  entstehen, und somit verliert der Ritter.

D.h. in diesem Fall konnten wir das Problem mit der Invariante „es befindet sich kein  $\lrcorner$  auf dem Spielfeld“ lösen.  $\square$

### 2.4 Eine kleine Sammlung von Invarianten in der Mathematik

In den vorigen Beispielen haben wir bereits gesehen, wie wir Invarianten einsetzen können, um Probleme zu lösen. Die Kunst bestand dabei darin, Invarianten zu entdecken, die einfach zu berechnen sind, aber dennoch genug Information über das betrachtete Problem enthalten.

Daß Invarianten auch helfen können „ernsthafte“ Probleme zu lösen zeigt die folgende Zusammenstellung einiger sehr prominenter (geometrischer) Invarianten; natürlich ist diese Liste keineswegs vollständig, sie soll nur einen Eindruck davon vermitteln, wie allgegenwärtig Invarianten in der Mathematik sind.

**Beispiel (2.6)** (Winkelsummen). *Jedes Dreieck in der Ebene besitzt die **Winkelsumme**  $\pi$ . Allgemeiner gilt: Jedes  $n$ -Eck in der Ebene besitzt die **Winkelsumme**  $(n - 2) \cdot \pi$ .*

Daß die Invarianz der Winkelsumme tatsächlich etwas besonderes ist, kann man erkennen, indem man Dreiecke auf einer Kugeloberfläche betrachtet. Die Winkelsumme von Dreiecken auf einer Kugeloberfläche ist stets größer als  $\pi$  und verschiedene Dreiecke können verschiedene Winkelsummen haben!

**Beispiel (2.7)** (Satz des Thales). *Seien  $A$  und  $B$  Punkte in der Ebene und sei  $H$  ein Halbkreis über der Strecke  $AB$ . Liegt ein Punkt  $C$  auf dem Halbkreis  $H$ , so ist der **Winkel  $ACB$  stets  $\pi/2$** .*

**Beispiel (2.8)** (Satz des Pythagoras). *In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die **Summe der Quadrate der Längen der Katheten gleich dem Quadrat der Länge der Hypotenuse**.*

**Beispiel (2.9)** (Eulercharakteristik). *Für jeden planaren (d.h. in die Ebene überkreuzungsfrei einbettbaren) endlichen Graph ist*

$$\text{Anzahl der Ecken} - \text{Anzahl der Kanten} + \text{Anzahl der Flächen} = 2.$$

*(Bei den Flächen muß auch die den gesamten Graph umgebende Fläche mitgezählt werden.)*

Die Eulercharakteristik kann man etwa dazu verwenden, alle regulären Polyeder zu klassifizieren.

**Aufgabe (2.10).** *Sammeln Sie weitere Invarianten! Anregungen: Zusammenhang zwischen Teilbarkeit und Quersummen, Beweise durch vollständige Induktion, Verallgemeinerungen des Satzes von Thales bzw. Pythagoras.*

### 3 Invarianten in der modernen Mathematik

Die Mathematik besteht aus vielen verschiedenen Teildisziplinen, wie etwa Geometrie, Algebra, Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, Numerik, Topologie, etc. Jedes dieser Teilgebiete beschäftigt sich mit einer gewissen Klasse von Objekten – geometrische Objekte sind z.B. spezielle Teilmengen des  $\mathbf{R}^n$  wie Geraden, Ebenen und Kugeln, algebraische Objekte sind z.B. Vektorräume etc.

Eine zentrales Ziel der Mathematik ist die Klassifikation von Objekten mit gewissen Eigenschaften – z.B. die Klassifikation geometrischer oder algebraischer Objekte. Hierbei bedeutet Klassifikation, dass wir die zu untersuchenden Objekte anhand möglichst einfacher Merkmale unterscheiden und beschreiben können wollen. Zum Beispiel können wir  $\mathbf{R}$ -Vektorräume durch ihre Dimension klassifizieren; für geometrische Objekte ist eine solche Klassifikation i.a. deutlich schwieriger.

Neben den Objekten interessiert man sich aber auch für die Beziehungen zwischen den einzelnen Objekten, also für Abbildungen zwischen den Objekten, die mit der betrachteten Struktur verträglich sind; in der Geometrie sind dies Abbildungen, die mit Längen und Winkeln verträglich sind, in der Algebra sind dies z.B. lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen. Auch hier stellt sich wieder die Frage, ob und wenn ja wieviele strukturerhaltende Abbildungen es zwischen zwei gegebenen Objekten gibt.

Um die Klassifikationsprobleme für Objekte und Beziehungen zwischen Objekten anzugehen, benötigen wir also Invarianten sowohl für Objekte als auch für Abbildungen zwischen Objekten. Im folgenden werden wir dies in der Sprache der Kategorien und Funktoren formalisieren; in Abschnitt 4 skizzieren wir, wie man mit dieser Art von Invarianten topologische Probleme lösen kann.

### 3.1 Kategorien

Wie bereits angedeutet, besteht eine mathematische Theorie aus Objekten (mit einer gewissen Struktur) und Abbildungen zwischen diesen Objekten (die diese Struktur erhalten) – die Theorie bildet also im folgenden Sinne eine Kategorie:

**Definition (3.1)** (Kategorie). *Eine Kategorie  $C$  umfaßt folgende Komponenten:*

- eine Klasse  $\text{Obj}(C)$  von Objekten,
- zu je zwei Objekten  $X, Y \in \text{Obj}(C)$  eine Menge  $\text{Abb}_C(X, Y)$  von sogenannten Morphismen,
- sowie Verknüpfungen

$$\circ: \text{Abb}_C(Y, Z) \times \text{Abb}_C(X, Y) \longrightarrow \text{Abb}_C(X, Z)$$

für alle  $X, Y, Z \in \text{Obj}(C)$ .

Dabei müssen folgende Eigenschaften erfüllt sein:

- Für jedes  $X \in \text{Obj}(C)$  gibt es einen Morphismus  $\text{id}_X \in \text{Abb}_C(X, X)$ , so daß für alle  $Y \in \text{Obj}(C)$  und alle  $f \in \text{Abb}_C(X, Y)$  bzw.  $g \in \text{Abb}_C(Y, X)$  gilt:

$$f \circ \text{id}_X = f \quad \text{und} \quad \text{id}_X \circ g = g.$$

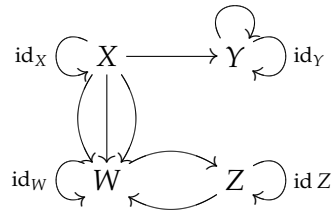
- Die Verknüpfung  $\circ$  ist assoziativ: für alle  $W, X, Y, Z \in \text{Obj}(C)$  und alle Morphismen  $f \in \text{Abb}_C(W, X)$ ,  $g \in \text{Abb}_C(X, Y)$  und  $h \in \text{Abb}_C(Y, Z)$  gilt

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Die obigen Axiome für  $\circ$  besagen, dass sich  $\circ$  so ähnlich wie die Verknüpfung von Abbildungen zwischen Mengen verhält; allerdings müssen Morphismen einer Kategorie nicht unbedingt Abbildungen im striktem Sinne sein – das Konzept der Kategorie ist weitaus flexibler.

**Aufgabe (3.2).** *Sei  $C$  eine Kategorie und  $X \in \text{Obj}(C)$  ein Objekt von  $C$ . Zeigen Sie, dass es genau einen Morphismus in  $\text{Abb}_C(X, X)$  gibt, der die Eigenschaft von  $\text{id}_X$  aus obiger Definition erfüllt.*

Schematisch kann man sich eine Kategorie als eine Menge von Punkten (den Objekten) vorstellen, zwischen denen es jeweils Pfeile (die Morphismen) gibt:



(Neben den gezeigten Pfeilen, gibt es natürlich auch noch alle Verknüpfungen dieser Pfeile).

### 3.2 Beispiele für Kategorien

**Beispiel (3.3).** Mengen und Mengenabbildungen bilden folgendermaßen eine Kategorie Mengen:

- Objekte: Jede Menge ist ein Objekt.
- Morphismen: Sind  $X$  und  $Y$  Mengen, so ist die Menge der Morphismen von  $X$  nach  $Y$  die Menge der Abbildungen (im üblichen Sinne)  $X \rightarrow Y$ .
- Verknüpfung: Die Verknüpfung zweier Morphismen (d.h. zweier Abbildungen) ist als die gewöhnliche Komposition von Abbildungen definiert.

Ist  $X \in \text{Obj}(\text{Mengen})$ , so ist  $\text{id}_X$  nichts anderes als die Abbildung

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

**Beispiel (3.4).** Die reellen Vektorräume  $\mathbf{R}^n$  bilden eine Kategorie Vekt:

- Objekte: Die Klasse der Objekte besteht aus den reellen Vektorräumen

$$\mathbf{R}^0 = \{0\}, \mathbf{R}, \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3, \dots$$

- Morphismen: Sind  $n, m \in \mathbf{N}$ , so besteht die Menge der Morphismen von  $\mathbf{R}^n$  nach  $\mathbf{R}^m$  aus allen linearen Abbildungen von  $\mathbf{R}^n$  nach  $\mathbf{R}^m$ , d.h. aus allen Abbildungen  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  mit

$$f(a \cdot x + b \cdot y) = a \cdot f(x) + b \cdot f(y)$$



für alle  $x, y \in \mathbf{R}^n$  und alle  $a, b \in \mathbf{R}$ . Dies sind also genau die Abbildungen  $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ , die mit der Vektorraumstruktur auf  $\mathbf{R}^n$  bzw.  $\mathbf{R}^m$  verträglich sind.

– Verknüpfung: Die gewöhnliche Komposition von Abbildungen.

Beispiele für lineare Abbildungen sind Drehungen um den Nullpunkt, Streckungen, Spiegelungen an (Hyper)Ebenen durch den Nullpunkt, sowie allgemein Abbildungen, die durch sogenannte Matrizen beschrieben werden.

Die mathematische Theorie, die der Kategorie  $\text{Vekt}$  entspricht, heißt Lineare Algebra. Auch andere algebraische Strukturen – etwa Gruppen oder Ringe, etc. – bilden Kategorien.

**Aufgabe (3.5).** Zeigen Sie, daß die Teilmengen der Ebene  $\mathbf{R}^2$  zusammen mit abstandserhaltenden Abbildungen zwischen solchen Teilmengen in natürlicher Weise eine Kategorie bilden.

### 3.3 Isomorphismen

Für das Klassifikationsproblem müssen wir natürlich zunächst die folgende Frage beantworten: Wann sind zwei Objekte einer Kategorie  $C$  einander so ähnlich, daß wir sie als gleich ansehen möchten?

Eine naheliegende Forderung ist, daß wir die beiden Objekte  $X$  und  $Y$  durch Morphismen vergleichen können – es sollte also Morphismen  $f \in \text{Abb}_C(X, Y)$  und  $g \in \text{Abb}_C(Y, X)$  geben. Dabei möchten wir außerdem in der Lage sein, möglichst viel Information über  $X$  und  $Y$  aus diesen beiden Morphismen zu rekonstruieren – man fordert deshalb, daß  $f \circ g = \text{id}_Y$  und  $g \circ f = \text{id}_X$  ist.

**Definition (3.6)** (Isomorphismus). Sei  $C$  eine Kategorie und seien  $X$  und  $Y$  zwei Objekte von  $C$ . Ein Morphismus  $f \in \text{Abb}_C(X, Y)$  heißt Isomorphismus, wenn es einen Morphismus  $g \in \text{Abb}_C(Y, X)$  mit

$$g \circ f = \text{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ g = \text{id}_Y$$

gibt. Gibt es einen Morphismus zwischen  $X$  und  $Y$  so sagen wir,  $X$  und  $Y$  sind isomorph (wörtlich: von gleicher Gestalt).

Zwei Objekte in der Kategorie der Mengen sind genau dann isomorph, wenn sie gleichmächtig sind, d.h. wenn sie gleich viele Elemente enthalten.

Zwei Objekte in der Kategorie  $\text{Vekt}$  der reellen Vektorräume sind genau dann isomorph, wenn sie dieselbe Dimension haben.

### 3.4 Funktoren

Wollen wir nun eine mathematische Theorie durch einfache Merkmale bzw. Invarianten charakterisieren oder allgemeiner Probleme einer mathematischen Theorie in eine andere mathematische Theorie übersetzen, so suchen wir nichts anderes als eine geeignete Abbildung zwischen den entsprechenden Kategorien. Da eine Theorie nicht nur aus den Objekten, sondern auch aus den zugehörigen Morphismen besteht, muß eine solche Übersetzung sowohl Objekte als auch Morphismen in die Zielkategorie übertragen. Sinnvollerweise fordert man zusätzlich, daß die Übersetzung auch mit den Verknüpfungen verträglich ist. Man nennt eine solche Übersetzung einen *Funktor*:

**Definition (3.7) (Funktor).** Ein Funktor  $F: C \longrightarrow D$  zwischen zwei Kategorien  $C$  und  $D$  enthält folgende Komponenten:

- eine Zuordnung  $F: \text{Obj}(C) \longrightarrow \text{Obj}(D)$ , die Objekte von  $C$  in Objekte von  $D$  übersetzt,
- und für je zwei Objekte  $X$  und  $Y \in \text{Obj}(C)$  eine Abbildung

$$F: \text{Abb}_C(X, Y) \longrightarrow \text{Abb}_D(F(X), F(Y)).$$

Dabei müssen folgende Eigenschaften erfüllt sein:

- Für alle  $X \in \text{Obj}(C)$  ist  $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$ ,
- und  $F$  ist verträglich mit den Verknüpfungen auf  $C$  und  $D$ : Für alle Objekte  $X, Y, Z$  und alle Morphismen  $f \in \text{Abb}_C(X, Y)$  und  $g \in \text{Abb}_C(Y, Z)$  gilt

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

in  $\text{Abb}_D(X, Z)$ .

**Beispiel (3.8)** (Vergißfunktork). Der Vergißfunktork  $V: \text{Vekt} \longrightarrow \text{Mengen}$  ist wie folgt erklärt:

- Ist  $\mathbf{R}^n \in \text{Obj}(\text{Vekt})$ , so definieren wir  $V(\mathbf{R}^n) \in \text{Obj}(\text{Mengen})$  als die unterliegende Menge  $\mathbf{R}^n$ ; wir haben also vergessen, daß  $\mathbf{R}^n$  ein Vektorraum ist.
- Ist  $f \in \text{Abb}_{\text{Vekt}}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ , so ist  $f$  nach Definition von  $\text{Vekt}$  eine lineare Abbildung  $\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ . Insbesondere ist  $f$  eine Abbildung und wir definieren  $V(f)$  als die zugehörige Abbildung  $\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$  von Mengen; wir haben also vergessen, daß  $f$  linear ist.

Da sowohl in  $\text{Vekt}$  als auch in  $\text{Mengen}$  die Verknüpfung als Komposition von Abbildungen definiert ist, ist es nicht schwer zu sehen, daß  $V$  tatsächlich ein Funktor ist.

In Abschnitt 4 werden wir uns mit einem Funktor beschäftigen, der Topologie (eine Art Geometrie) in Algebra übersetzt.

### 3.5 Funktoren sind Invarianten

Was macht die Übersetzung durch Funktoren so interessant? Das folgende Lemma zeigt, daß jeder Funktor insbesondere eine Art Invariante ist – der Wert des Funktors ist invariant unter Isomorphismen:

**Lemma (3.9).** Sei  $F: C \longrightarrow D$  ein Funktor zwischen zwei Kategorien  $C$  und  $D$ . Sind  $X$  und  $Y$  in  $C$  isomorph, so sind  $F(X)$  und  $F(Y)$  in  $D$  isomorph.

*Beweis.* Seien  $X, Y \in \text{Obj}(C)$  und sei  $f \in \text{Abb}_C(X, Y)$  ein Isomorphismus zwischen  $X$  und  $Y$ . Nach Definition gibt es dann einen „inversen“ Morphismus  $g \in \text{Abb}_C(Y, X)$  mit

$$g \circ f = \text{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ g = \text{id}_Y.$$

Da  $F$  ein Funktor ist, erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} F(g) \circ F(f) &= F(g \circ f) \\ &= F(\text{id}_X) \\ &= \text{id}_{F(X)} \end{aligned}$$

und analog  $F(f) \circ F(g) = \text{id}_{F(Y)}$ . Also sind  $F(X)$  und  $F(Y)$  isomorph.  $\square$

Funktoren können also helfen zu entdecken, ob zwei Objekte nicht isomorph sind: Ist nämlich  $F: X \longrightarrow Y$  ein Funktor und sind  $X$  und  $Y$  zwei Objekte mit der Eigenschaft, dass die Übersetzungen  $F(X)$  und  $F(Y)$  in  $D$  nicht isomorph sind, so sind aufgrund des obigen Lemmas auch  $X$  und  $Y$  in  $C$  nicht isomorph. Haben wir den Funktor  $F$  geschickt gewählt, so ist es viel einfacher zu entscheiden, ob  $F(X)$  und  $F(Y)$  isomorph sind als zu entscheiden, ob  $X$  und  $Y$  isomorph sind.

## 4 Eine topologische Invariante

In diesem Abschnitt betrachten wir eine Invariante, die wie im vorigen Abschnitt beschrieben von einem Funktor abstammt – sogenannte *Homologie von topologischen Räumen* – und zeigen, wie man mit dieser Invariante die Existenz von Lösungen gewisser Gleichungen beweisen kann.

### 4.1 Was ist Topologie?

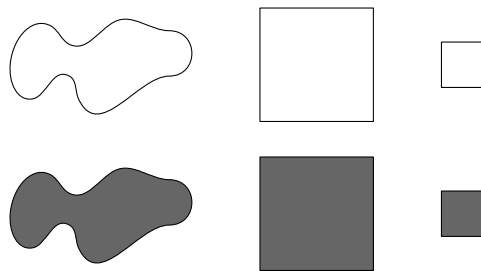
Die Topologie ist eine Art Geometrie, in der aber die genauen Abmessungen (wie Längen oder Winkel) keine Rolle spielen – stattdessen gibt es nur einen qualitativen Begriff der Nähe. Vereinfacht kann man sich vorstellen, daß topologische Räume geometrische Objekte sind, die aber aus einem elastischen Material bestehen, man darf topologische Räume also verzerren oder knautschen. Wir untersuchen also die folgende Kategorie Top:

- Objekte: Die Objekte der Kategorie Top sind topologische Räume; eine exakte Definition dieses Begriffs findet man in der entsprechenden Literatur [1, 5].
- Morphismen: Die Menge der Morphismen zwischen zwei topologischen Räumen  $X$  und  $Y$  besteht aus allen Abbildungen, die  $X$  stetig in eine Teilmenge von  $Y$  deformieren. Verzerren, knautschen und zusammenkleben sind stetige Deformationen, es ist jedoch nicht erlaubt, Teile zu zerreißen oder aufzuschneiden.
- Verknüpfung: Die Verknüpfung ist wie in den Kategorien Mengen

bzw. Vekt durch die gewöhnliche Komposition von Abbildungen gegeben.

Wann sind zwei topologische Räume isomorph? Ein Isomorphismus zwischen zwei topologischen Räumen ist eine stetige Deformation, die durch eine stetige Deformation rückgängig gemacht werden kann. Kleben kann i.a. nur durch zerschneiden (was nicht stetig ist!) rückgängig gemacht werden. Also können topologische Isomorphismen nur verzerren oder knautschen. D.h. topologische Räume sind genau dann isomorph, wenn sie die dieselbe prinzipielle Form besitzen.

**Beispiel (4.1).** Sei  $S \subset \mathbf{R}^2$  der Einheitskreis (nur die Kreislinie, also ohne das Innere) und sei  $D \subset \mathbf{R}^2$  die (gefüllte) Einheitskreisscheibe. Die oberen Objekte sind zu  $S$  topologisch isomorph, die unteren zu  $D$ :



Da es sehr viele stetige Deformationen gibt, ist es i.a. nicht leicht, mathematisch stringent nachzuweisen, dass zwei topologische Räume nicht isomorph sind – dies gelingt zumeist nur mit geeigneten Invarianten.

## 4.2 Homologie – eine topologische Invariante

Um topologische Räume zu klassifizieren oder zu entscheiden, ob zwischen gewissen topologischen Räumen schöne stetige Abbildungen existieren, benötigen wir eine geeignete Invariante. Im folgenden werden wir eine solche topologische Invariante vorstellen – die sogenannte *Homologie*.

Die Grundidee hinter der Konstruktion von Homologie ist, die topologische Welt in der Welt der linearen Algebra nachzubauen. In der Topologie bzw. der linearen Algebra stehen uns folgende elementare Bausteine zur Verfügung:





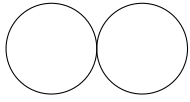
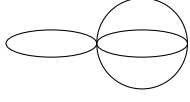

<i>Topologie</i>	<i>Algebra</i>
	$H_n = 0$ für alle $n \in \mathbf{N}$
	$H_0 = 0, H_1 = \mathbf{R}, H_2 = 0, H_3 = 0, \dots$
	$H_0 = 0, H_1 = \mathbf{R}, H_2 = 0, H_3 = 0, \dots$
	$H_0 = 0, H_1 = 0, H_2 = \mathbf{R}, H_3 = 0, \dots$
	$H_0 = 0, H_1 = \mathbf{R}^2, H_2 = 0, H_3 = 0, \dots$
	$H_0 = 0, H_1 = \mathbf{R}, H_2 = \mathbf{R}, H_3 = 0, \dots$
	$H_0 = 0, H_1 = \mathbf{R}^2, H_2 = \mathbf{R}, H_3 = 0, \dots$

Abbildung 1: Beispiele von topologischen Räumen und ihrer Homologie

*topologische Bausteine*  
Sphären und Bälle  
stetige Abbildungen

*algebraische Bausteine*  
 $\mathbf{R}$ -Vektorräume  
lineare Abbildungen

Genauer gesagt, ist Homologie eine Folge  $(H_n: \text{Top} \rightarrow \text{Vekt})_{n \in \mathbf{N}}$  von Funktoren, die in jeder Dimension zählen, wieviele Löcher das betrachtete Objekt in dieser Dimension besitzt. Ist  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung von topologischen Räumen, so geben die zugehörigen linearen Abbildungen  $H_n(f): H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  an wie oft  $f$  die  $n$ -dimensionalen Löcher von  $X$  um die  $n$ -dimensionalen Löcher von  $Y$  wickelt.

Eine Sammlung von Beispielen von topologischen Räumen und ihrer

Homologie ist in Abbildung 1 zusammengestellt.

Wir illustrieren außerdem an drei Beispielen, wie sich stetige Deformationen unter Homologie verhalten:

- Die Funktoraxiome liefern bereits, dass  $H_n(\text{id}_X) = \text{id}_{H_n(X)}$  für alle topologischen Räume  $X$  und alle  $n \in \mathbf{N}$  ist.
- Sei  $f: \infty \rightarrow \infty$  die Abbildung, die durch Spiegelung an der „Mittelsenkrechten“ gegeben ist. Dann ist

$$\begin{aligned} H_1(f): H_1(\infty) &\longrightarrow H_1(\infty) \\ (x_1, x_2) &\longmapsto (x_2, x_1). \end{aligned}$$

- Sei  $f: S \rightarrow S$  die Abbildung, die die Kreislinie zweimal um sich selbst wickelt. Dann ist

$$\begin{aligned} H_1(f): H_1(S) &\longrightarrow H_1(S) \\ x &\longmapsto 2 \cdot x. \end{aligned}$$

Die Homologie liefert allerdings kein exaktes Abbild der topologischen Welt – es gibt Räume, deren Homologie gleich aussieht, die aber nicht topologisch isomorph sind.

Eine (im mathematischen Sinne) präzise Definition von (reduzierter) Homologie erfordert mehr Vorkenntnisse im Bereich der Topologie und der Algebra [6] und kann deshalb an dieser Stelle nicht aufgeführt werden.

### 4.3 Der Brouwersche Fixpunktsatz

**Satz (4.2)** (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Jede stetige Abbildung  $f: D \rightarrow D$  besitzt mindestens einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein  $x \in D$  mit*

$$f(x) = x.$$

*(Entsprechende Aussagen gelten auch in höheren Dimensionen.)*

Sei  $f: D \rightarrow D$  eine stetige Abbildung. Ein Punkt  $x \in D$  erfüllt genau dann die Gleichung  $f(x) - x = 0$  im  $\mathbf{R}$ -Vektorraum  $\mathbf{R}^2$ , wenn er ein Fixpunkt von  $f$  ist. Der Brouwersche Fixpunktsatz besagt also, dass die Gleichung  $f(x) - x = 0$  in  $D$  lösbar ist; allerdings liefert der Brouwersche Fixpunktsatz keine Konstruktion einer solchen Lösung.

Man kann die Aussage des Brouwerschen Fixpunktsatzes auch schön mit Hilfe von Landkarten veranschaulichen:

**Beispiel (4.3).** *Wenn man zwei identische Landkarten hat, von denen man eine knickt, zerkrummt und verzerrt und diese dann so plattdrückt, dass sie vollständig auf das unveränderte Exemplar paßt, so gibt es Koordinaten mit der Eigenschaft, dass die zugehörigen Punkte auf den beiden Landkarten genau übereinanderliegen.*

*Ein ähnliches Phänomen entsteht, wenn man sich in einer Stadt befindet und einen Stadtplan dieser Stadt auf den Boden legt – dann gibt es einen Punkt auf dem Boden, der genau unter dem zugehörigen Punkt auf dem Stadtplan liegt.*

#### 4.4 Der Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes

Bevor wir den Brouwerschen Fixpunktsatz beweisen, zeigen wir zunächst den folgenden Hilfssatz:

**Lemma (4.4).** *Es gibt keine stetigen Abbildungen  $f: S \rightarrow D$  und  $g: D \rightarrow S$  mit der Eigenschaft  $g \circ f = \text{id}_S$ .*

Wie können wir zeigen, daß es keine solchen stetigen Abbildungen  $f$  und  $g$  gibt? Es gibt sehr viele stetige Abbildungen von  $S$  nach  $D$  und von  $D$  nach  $S$  und es ist natürlich nicht möglich, für alle diese Abbildungen zu überprüfen, ob die Komposition  $g \circ f$  mit der Identität auf  $S$  übereinstimmt.

Übersetzen wir dieses Problem jedoch mit Hilfe der Homologie in die Welt der linearen Algebra, so erhalten wir eine überschaubarere Situation:

*Beweis.* Um das Lemma zu beweisen, führen die Annahme, daß es solche Abbildungen  $f$  und  $g$  gibt, zu einem Widerspruch:

*Angenommen, es gäbe stetige Abbildungen  $f: S \rightarrow D$  und  $g: D \rightarrow S$  mit der Eigenschaft  $g \circ f = \text{id}_S$ . Das entsprechende Abbild in der linearen*



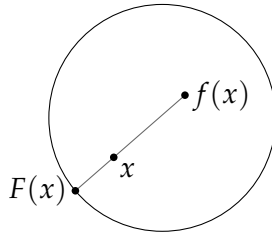


Abbildung 2: Definition von  $F$

Algebra wäre dann:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_1(g \circ f) = H_1(\text{id}_S) & & \\
 & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \\
 H_1(S) & \xrightarrow{H_1(f)} & H_1(D) & \xrightarrow{H(g)} & H_1(S) \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 \mathbf{R} & \xrightarrow{?} & 0 & \xrightarrow{?} & \mathbf{R} \\
 & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \\
 & & \text{id}_{\mathbf{R}} & & 
 \end{array}$$

Da  $\mathbf{R}$  mehr als ein Element enthält (sogar unendlich viele) und der Nullvektorraum  $0$  nur ein Element enthält (nämlich die Null), kann man die Identitätsabbildung  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  nicht wie oben in zwei Abbildungen  $\mathbf{R} \rightarrow 0$  und  $0 \rightarrow \mathbf{R}$  zerlegen. Dies ist der gewünschte Widerspruch.

Also kann es solche Abbildungen  $f$  und  $g$  nicht geben. □

*Beweis (des Brouwerschen Fixpunktsatzes (4.2)).* Angenommen, es gäbe eine stetige Abbildung  $f: D \rightarrow D$  ohne Fixpunkte. Wir führen diese Annahme nun zu einem Widerspruch:

Aus  $f$  konstruieren wir folgendermaßen eine Abbildung  $F: D \rightarrow S$ : Sei  $x \in D$ . Da  $f$  laut Annahme keinen Fixpunkt besitzt, ist  $x \neq f(x)$ . Wir definieren  $F(x)$  als den Schnittpunkt der (eindeutig bestimmten) Halbgerade ausgehend von  $f(x)$  durch  $x$  mit dem Kreis  $S$  (s. Abbildung 2):

Man kann zeigen, dass diese Abbildung  $F: D \rightarrow S$  stetig ist. Nach Konstruktion von  $F$  gilt dabei  $F(x) = x$  für alle  $x \in S$ . Mit anderen Worten:

Bezeichnet  $i: S \longrightarrow D$  die (stetige!) Inklusion von  $S$  in  $D$ , so gilt

$$F \circ i = \text{id}_S.$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zu Lemma (4.4). Also muß jede stetige Abbildung  $f: D \longrightarrow D$  mindestens einen Fixpunkt besitzen.  $\square$

### Literatur

- [1] M.A. Armstrong. *Basic Topology*, korrigierter Nachdruck des Originals von 1979, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1983. Eine anschauliche Einführung in die Topologie. Zitiert auf Seite: [12](#)
- [2] R. Backhouse. *Program Construction: Calculating Implementations from Specifications*, Wiley & Sons, 2003. Enthält einen Abschnitt über Invarianten – aus der Sicht der Informatik. Zitiert auf Seite: [4](#)
- [3] A. Engel. *Problem Solving Strategies*, Problem Books in Mathematics, korrigierte zweite Auflage, Springer, 1999. Eine schöne, umfassende Sammlung allerlei interessanter Probleme, wie sie z.B. auch in Mathematik-Wettbewerben auftreten. Zitiert auf Seite: [2](#)
- [4] D.R. Hofstadter. *Gödel, Escher, Bach*, Dtv, 1992. Ein Klassiker – wie der Titel schon andeutet werden Bezüge zwischen Mathematik und anderen Künsten hergestellt. Zitiert auf Seite: [3](#)
- [5] K. Jänich. *Topologie*, achte Auflage, Springer, 2005. Bietet eine schönen, gut verständlichen Einstieg in die Topologie; enthält außerdem eine kleine Einführung in Kategorien und Funktoren. Zitiert auf Seite: [12](#)
- [6] W.S. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology*. Band 127 von *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 1991. Ein fortgeschritteneres Topologiebuch, das algebraische Topologie – also insbesondere auch Homologie – behandelt. Zitiert auf Seite: [15](#)

Clara Löh

Adresse: Fachbereich Mathematik und Informatik der WWU Münster  
Einsteinstr. 62  
48149 Münster

email: clara.loeh@uni-muenster.de

URL: <http://wwwmath.uni-muenster.de/u/clara.loeh>