Klassifikation der kompakten Flächen

Clara Strohm

23. Mai 2000

1 Kompakte Flächen

Definition. (a) Im folgenden sei

$$U^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\},$$
$$E^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\},$$
$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}.$$

(b) Ein topologischer Raum S heisst genau dann *n-dimensionale Mannigfaltigkeit*, wenn S hausdorffsch ist und jedes $x \in S$ eine offene Umgebung in S besitzt, die homöomorph zu U^n ist.

(c) Ein topologischer Raum S heisst genau dann *kompakte Fläche*, wenn S eine kompakte, zusammenhängende zweidimensionale Mannigfaltigkeit ist.

2 Quotiententopologie

Definition. Seien X und Y topologische Räume, $f\colon X \to Y$ surjektiv. Y trägt genau dann die durch f induzierte *Quotiententopologie*, wenn gilt:

$$U \text{ offen in } Y \iff f^{-1}(U) \text{ offen in } X.$$

Lemma 1. *Sei X kompakt, Y hausdorffsch, $f\colon X \to Y$ surjektiv und stetig. Dann ist die Abbildung f abgeschlossen und Y trägt die durch f induzierte Quotiententopologie.*

Beweis. (a) f ist abgeschlossen:

Sei $A \subset X$ abgeschlossen. Damit ist A kompakt (abgeschlossene Teilmengen kompakter Räume sind kompakt). Da f stetig ist, ist dann auch $f(A) \subset Y$ kompakt und daher abgeschlossen (kompakte Teilmengen hausdorffscher Räume sind abgeschlossen).

(b) Y trägt die durch f induzierte Quotiententopologie:

Sei $U \subset Y$ offen. Dann ist auch $f^{-1}(U) \subset X$ offen, da f stetig ist.

Sei $f^{-1}(U) \subset X$ offen, d.h. $X \setminus f^{-1}(U)$ abgeschlossen. Da f surjektiv ist, ist

$$f(X \setminus f^{-1}(U)) = Y \setminus U,$$

wobei dann $Y \setminus U$ abgeschlossen ist, da f abgeschlossen ist. Also ist $U \subset Y$ offen. □

Definition. Seien S_1, S_2 disjunkte (kompakte) Flächen.

Für $i \in \{1, 2\}$ wähle $D_i \subset S_i$, so dass $D_i \cong E^2$, und einen Homöomorphismus $h\colon \partial D_1 \to \partial D_2$. Sei $S_i' := S_i \setminus \mathring{D}_i$. Dann ist die *zusammenhängende Summe* $(S_1 \# S_2)$ von S_1 und S_2 der Quotientenraum von $S_1' \sqcup S_2'$, den man erhält, wenn man für alle $x \in D_1$ die Punkte x mit $h(x)$ identifiziert.

Lemma 2. *Die zusammenhängende Summe ist unabhängig von der Wahl der D_i bzw. h.*

Beweis. Mit Verwendung der Kompaktheit, oder s. [Bröcker, Jänich] (S.106 ff). □

3 Triangulierung kompakter Flächen

3.1 Triangulierbarkeit

Definition. Eine *Triangulierung* einer kompakten Fläche S besteht aus einer endlichen Familie abgeschlossener Mengen $T_1, \ldots, T_n$, die S überdecken, und einer Familie von Homöomorphismen $\varphi_i\colon T_i' \to T_i, i \in \{1, \ldots, n\}$, wobei die T_i' Dreiecke des $\mathbb{R}^2$ sind. Die T_i heissen Dreiecke. Die Teilmengen von T_i, die unter φ_i Bilder von Kanten bzw. Ecken von T_i' sind, heissen Kanten bzw. Ecken. Dabei muss folgende Bedingung erfüllt sein: Zwei verschiedene Dreiecke T_i und T_j sind entweder disjunkt, oder sie haben genau eine Kante oder genau eine Ecke gemeinsam.

Satz. *Jede kompakte Fläche ist triangulierbar.*

Beweis. Folgt aus [Radó], wobei zu berücksichtigen ist, dass es sich hier um kompakte Flächen handelt (d.h. die Bedingung der abzählbaren Umgebungsbasis entfällt, und aufgrund der Kompaktheit erhält man eine Triangulierung mit *endlich* vielen Dreiecken). □

3.2 Eigenschaften der Triangulierung

Lemma 3. *(a) Jede Kante ist Kante von genau zwei Dreiecken.*

(b) Sei v Ecke einer Triangulierung. Dann lässt sich die Menge aller Dreiecke $T_1, \ldots, T_{n_v}$, die v als Ecke enthalten, so numerieren, dass T_i und T_{i+1} (für $0 \leq i \leq n_v - 1$, wobei $T_0 := T_{n_v}$) eine Kante gemeinsam haben.

Beweis. (a) Widerspruchsbeweis ?? evtl. über Zusamenhang ?

(b) folgt direkt aus (a) und der Definition der Triangulierung. □

Lemma 4. *Seien $T_1, \ldots, T_n \subset S$ die Dreiecke einer triangulierten kompakten Fläche S. Dann gibt es eine Numerierung $T_1, \ldots, T_n$, so dass T_m eine Kante e_m mit einem der Dreiecke $T_1, \ldots, T_{m-1}$ gemeinsam hat.*

Beweis. (induktiv). Nenne eines der Dreiecke T_1.

Sei für $T_1, \ldots, T_r$ $(0 < r < n)$ obige Bedingung erfüllt.

Angenommen keines der verbleibenden Dreiecke hat eine gemeinsame Kante mit einem der Dreiecke $T_1, \ldots, T_r$. Dann kann wegen Lemma 3(b) auch keines der verbleibenden Dreiecke eine gemeinsame Ecke mit einem der Dreiecke $T_1, \ldots, T_r$ haben. D.h. S lässt sich dann in zumindest zwei disjunkte, nichtleere abgeschlossene Mengen zerlegen, was aber dem Zusammenhang von S widerspricht.

Also gibt es ein T_{r+1}, das eine Kante mit einem der Dreiecke $T_1, \ldots, T_r$ gemeinsam hat. □

4 Darstellung kompakter Flächen durch Worte

Lemma 5. *Sei S eine (triangulierte) kompakte Fläche. Dann lässt sich S als topologischer Raum dadurch erhalten, dass in einem (regulären) $2m$-Eck gewisse Seitenpaare identifiziert werden.*

Beweis. Seien $T_1, \ldots, T_n$ die Dreiecke einer Triangulierung von S nach Lemma 4 (mit den entsprechenden Kanten $e_2, \ldots, e_n$) und $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ Homöomorphismen mit $\varphi_i \colon T_i' \to T_i$, wobei die $T_1', \ldots, T_n'$ paarweise disjunkte Dreiecke des $\mathbb{R}^2$ sind.

Setze $T' := \coprod T_i'$, d.h. T' ist kompakt (endliche Koprodukte kompakter Räume sind kompakt). Wähle $\varphi \colon T' \to S$ so, dass $\varphi|_{T_i'} = \varphi_i$. Dann ist φ surjektiv und stetig (folgt aus der Definition der topologischen Summe). Mit Lemma 1 folgt also, dass S die durch φ induzierte Quotiententopologie von T' trägt.

Bilde nun D (induktiv) wie folgt: Sei $D_1 := T_1'$, $D_i := (D_{i-1} \sqcup T_i')/_\sim$, wobei

$$a \sim b \iff (\varphi(a) = \varphi(b) \text{ und } a, b \in \varphi^{-1}(e_i)) \vee (a = b).$$

(wegen Lemma 4 ist e_i Kante von T_i und T_j $(j < i)$, d.h. $\varphi^{-1}(e_i)$ besteht aus je einer Kante von T_i' und $T_j' \subset D_i$). Setze $D := D_n$.

Es ist $D \cong E^2$, denn es gilt:

Lemma 6. *Seien $E_1, E_2 \cong E^2$ $(E_1 \cap E_2 = \emptyset)$, $A_i \subset \partial E_i$ mit $A_i \cong [-1, 1]$. Sei $h \colon A_1 \to A_2$ ein Homöomorphismus. Dann ist $(E_1 \sqcup E_2)/_\sim \cong E^2$, wobei $\sim$ so, dass A_1 mit A_2 durch h identifiziert wird.*

Beweis. Sei $h_1 \colon A_1 \to [-1, 1] \times 0$ ein Homöomorphismus. Dann gibt es einen Homöomorphismus $H_1 \colon E_1 \to H_o := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in E^2 \wedge y \geq 0\}$, so dass $H_1|_{A_1} = h_1$. Setze

$$\begin{tikzcd}
\partial E_1 & \supset & A_1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "h_1"'] & A_2 \arrow[d, "h_2"] & \subset & \partial E_2 \arrow[d, "H_2"] \\
H_o \arrow[from=1-1, "H_1"'] & \supset & {[-1,1] \times 0} \arrow[r, equal] & {[-1,1] \times 0} & \subset & H_u
\end{tikzcd}$$

Abbildung 1: Situation bei Lemma 6

$h_2 := h_1 \circ h^{-1}$ und $H_2 \colon E_2 \to H_u := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in E^2 \wedge y \leq 0\}$, sodass $H_2|_{A_2} = h_2$. Dann folgt:

$$(E_1 \sqcup E_2)/_{\mathrm{h}} \cong (H_1(E_1) \sqcup H_2(E_2))/_{h_2 \circ h \circ h_1^{-1}} \cong (H_o \sqcup H_u)/_{\mathrm{id}} \cong E^2. \qquad \square$$

Fortsetzung des Beweises zu Lemma 5: Vollständige Induktion unter Verwendung der induktiven Definition von D liefert dann $D \cong E^2$, da $T_i' \cong E^2$ und $e_i \cong [-1,1]$.

Setze $\psi \colon D \to S$, wobei $\psi(x) := \varphi(x)$ (ist aufgrund der Konstruktion von D eine Abbildung). Dann ist ψ surjektiv und stetig (φ ist stetig; Definition der Quotiententopologie), d.h. S trägt die durch ψ induzierte Quotiententopologie von D (Lemma 1). Dieses D entspricht der Topologie T'/φ, da die Reihenfolge der Identifikationen egal ist. (Sind $f \colon X \to Y$, $g \colon Y \to Z$ surjektive Abbildungen, trägt Y die durch f, bzw. Z die durch $g \circ f$ induzierte Quotientntopologie, so ist $Z = Y/g = (X/f)/g = X/(g \circ f)$.)

Damit ist D auch homöomorph zu einem $2m$-Eck, wobei man S als Quotientenraum aus D erhält, indem man die Kante $f_i \subset \partial D$ mit der Kante $f_j \subset \partial D$ identifiziert, für die $\varphi(f_i) = \varphi(f_j)$ ist (wegen Lemma 3(a) werden dann jeweils Seitenpaare identifiziert). □

Lemma 7. *Es gibt nur zwei wesentlich verschiedene Klassen von Abbildungen, die zwei Kanten $a := AB, a' := A'B'$ miteinander identifizieren ($a, a' \in \partial D$).*

Beweis. Seien $f_1, f_2 \colon a \to a'$ Homöomorphismen mit $f_i(A) = A'$ und $f_i(B) = B'$. Dann ist auch $f := f_2^{-1} \circ f_1$ ein Homöomorphismus, und es gibt einen Homöomorphismus $F \colon D \to D$ mit $F|_a = f$. In $F(D)$ ist nun aber a mit a' durch f_2 identifiziert. D.h. jeder Homöomorphismus $g \colon a \to a'$ mit $g(A) = g(A'), g(B) = g(B')$ führt zur gleichen Fläche. Es gibt also nur zwei verschiedene Klassen von Abbildungen, die zwei Kanten identifizieren (es gibt nur zwei Möglichkeiten, die Eckpunkte A, B topologisch auf A', B' abzubilden). □

Definition. Man bezeichne je zwei Kanten von D, die miteinander identifiziert werden, mit demselben Buchstaben. Startet man nun an einer beliebigen Ecke von D und notiert die Folge der Buchstaben (mit Exponent 1 bzw. -1, je nach Identifikation), die man erhält, wenn man den Rand von D "entlanggeht", so erhält man ein *Wort* W, das S repräsentiert.

Sei $a \in W$. Ist auch $a^{-1} \in W$, so ist a eine *Kante erster Art*, andernfalls eine *Kante zweiter Art*.

Lemma 8. *Jedes Wort repräsentiert eine kompakte Fläche.*

Beweis. Ist klar. □

5 Klassifikationssatz

Klassifikationssatz. *Jede kompakte Fläche ist homöomorph zur zusammenhän- genden Summe von Tori, homöomorph zur zusammenhängenden Summe von projektiven Ebenen, oder homöomorph zu S^2.*

Der Beweis erfolgt in zwei Abschnitten:

(A) Jede kompakte Fläche S lässt sich durch eines der folgenden Worte darstellen:

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$$
$$a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_n a_n$$
$$a a^{-1}$$

(B) a) Die zusammenhängende Summe von n Tori entspricht dem Wort

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$$

b) Die zusammenhängende Summe von n projektiven Ebenen entspricht dem Wort

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_n a_n$$

c) Die Sphäre S^2 entspricht dem Wort

$$a a^{-1}$$

Beweis von (A)

1. Stelle S als Polygon $D \subset \mathbb{R}^2$ dar, dessen Kanten paarweise identifiziert werden.

   Beweis. Lemma 5. □

2. D lässt sich so transformieren, dass alle Ecken mit ein und derselben Ecke identifiziert werden.

   Beweis. Definiere folgende Relation: Zwei Ecken sind genau dann äquivalent, wenn sie miteinander identifiziert werden. Dies ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation. D.h. es ist zu zeigen, dass man D so transformieren kann, dass alle Ecken zu derselben Äquivalenzklasse gehören. Dafür sind zwei Arten von Umformungen nötig:

   a) Elimination benachbarter Kanten erster Art (falls mehr als 2 Zeichen vorhanden sind) wie in Abbildung 2.

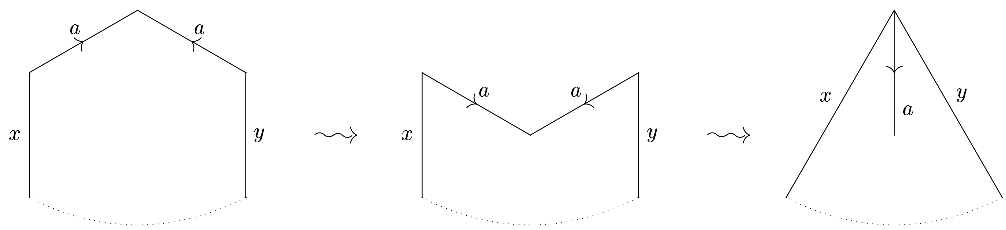

Abbildung 2: Elimination benachbarter Kanten erster Art

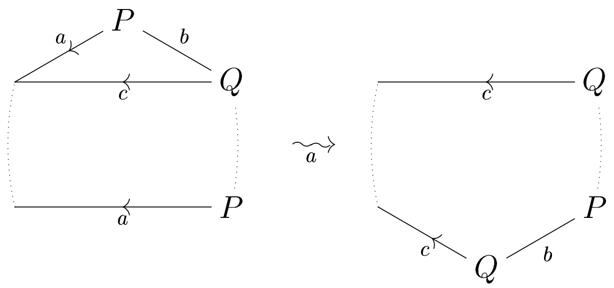

Abbildung 3: Verkleinerung einer Äquivalenzklasse

b) Seien alle benachbarten Kanten erster Art eliminiert. Gibt es nun noch (mindestens) zwei Äquivalenzklassen (mit zwei oder mehr Ecken), so kann man D so transformieren, dass sich die eine Äquivalenzklasse um einen Punkt vergrössert, die andere dagegen um einen Punkt vermindert wie in Abbildung 3

D.h. hat man (a) bzw. (b) oft genug angewendet, so gehören alle Ecken zu derselben Äquivalenzklasse (denn besteht eine Äquivalenzklasse aus genau einem Punkt, so wird diese mit Schritt (a) beseitigt). $\square$

3. Paare Kanten zweiter Art lassen sich benachbart machen wie in Abbildung 4.

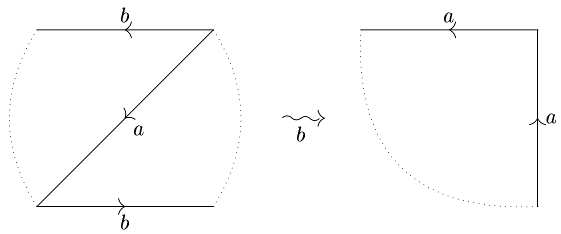

Abbildung 4: Kanten zweiter Art

4. Paare Kanten erster Art:

   Existieren keine Paare Kanten erster Art mehr, so enspricht S dem Wort $a_1a_1a_2a_2\cdots a_na_n$.

Das Wort enthalte nun Paare Kanten erster Art, und mindestens vier Zeichen.

a) Dann gibt es mindestens zwei Paare Kanten erster Art und das Wort hat die Form $\cdots a \cdots b \cdots a^{-1} \cdots b^{-1} \cdots$:

Beweis. Angenommen das wäre nicht der Fall, d.h. das Wort hat die Form $AaBa^{-1}$, wobei keine Kante aus A mit Kanten aus B identifiziert wird (A und B sind nicht leer) – vergleiche Abbildung 5.

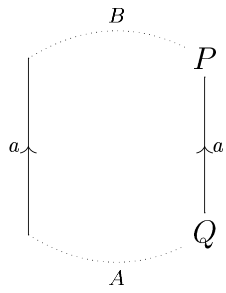

Abbildung 5: Paare Kanten erster Art, Teil (a)

Da P und Q nicht miteinander identifiziert werden, steht das aber im Widerspruch dazu, dass Schritt 2 ausgeführt wurde. □

b) Paare Kanten erster Art:
Paare Kanten erster Art lassen sich benachbart machen:

Beweis. Hat das Wort nur vier Zeichen (d.h. $aba^{-1}b^{-1}$), so bleibt nichts mehr zu tun. Es bleibt also noch die Situation in Abbildung 6 zu betrachten. □

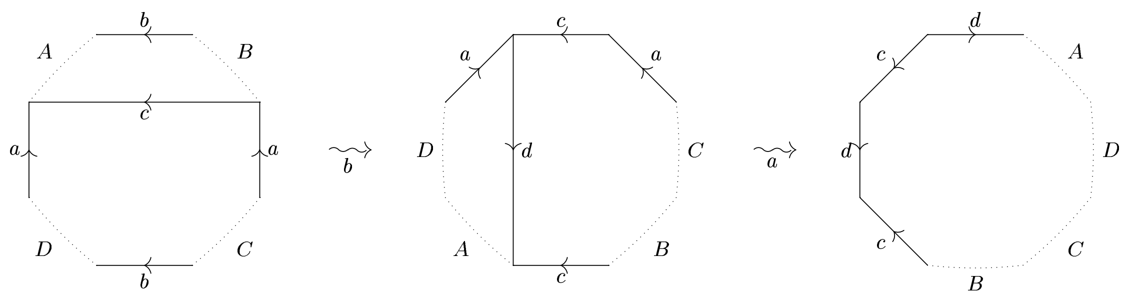

Abbildung 6: Paare Kanten erster Art, Teil (b) – Hierbei sei A oder B nicht leer.

Bei diesen Umformungen werden A, B, C, D nicht verändert.
Besteht das Wort nur noch aus Kanten erster Art, so hat es (nach mehrfacher Anwendung obiger Umformung) die Form

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\cdots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}.$$

Existieren noch Paare Kanten zweiter Art, so lässt sich das Wort durch wiederholte Anwendung von folgendem Lemma auf die Form $a_1a_1a_2a_2\cdots a_na_n$ bringen:

Lemma 9. *Ein Wort der Form $xxaba^{-1}b^{-1}A$ lässt sich in ein Wort der Form $zzyyuuA$ überführen.(bzw. Torus # projektive Ebene $\cong$ p.E. # p.E. # p.E., falls A das leere Wort ist).*

Beweis. Siehe Abbildung 7. □

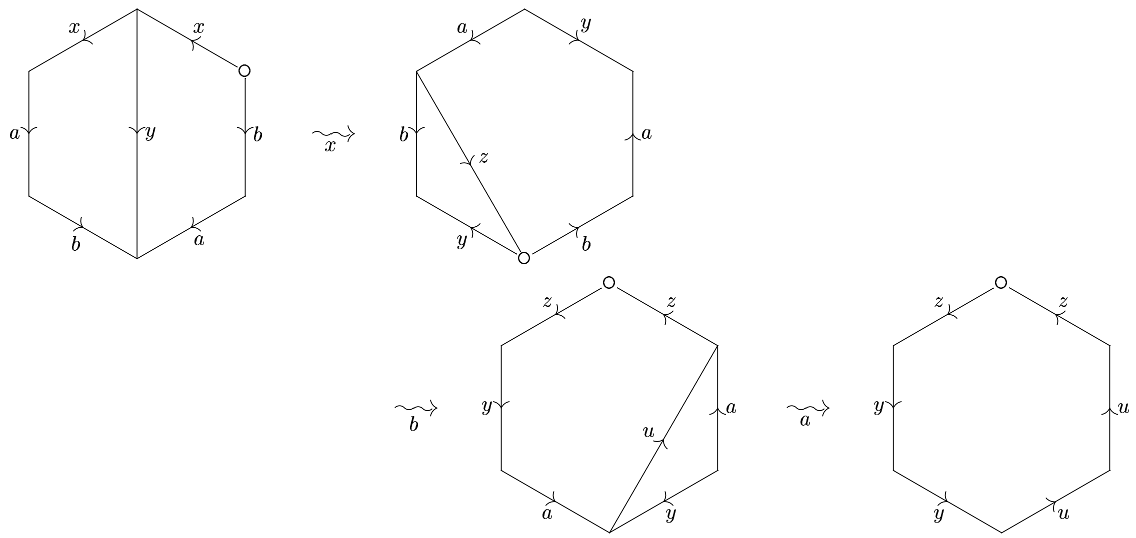

Abbildung 7: Beweis von Lemma 9

Ist A nicht leer, so ist nun nochmals Schritt 3 auszuführen.

Beweis von (B)

Es gilt offensichtlich:

$$\text{Torus} \cong aba^{-1}b^{-1}$$
$$\text{Projektive Ebene} \cong aa$$
$$\text{Sphäre} \cong aa^{-1}.$$

D.h. (c) ist klar. Den Beweis von (a) bzw. (b) erhält man durch vollständige Induktion aus folgendem Lemma, das wegen Lemma 8 anwendbar ist:

Lemma 10. *Die zusammenhängende Summe der Worte $a\cdots b$ und $c\cdots d$ wird durch die Aneinanderreihung $a\cdots bc\cdots d$ der Worte repräsentiert.*

Beweis. Der Rand der herausgenommenen Zelle werde jeweils mit s bezeichnet.Man wähle s so, dass sich nach dem "Aufschneiden" der Fläche ohne Zelle das Wort $a \cdots bs$ bzw. $s^{-1}c \cdots d$ ergibt (Dies ist immer möglich, und beeinflusst nach Lemma 2 die zusammenhängende Summe nicht). Nach der Identifizierung ergibt sich also das Wort $a \cdots bc \cdots d$ (siehe auch Abbildung 8). $\square$

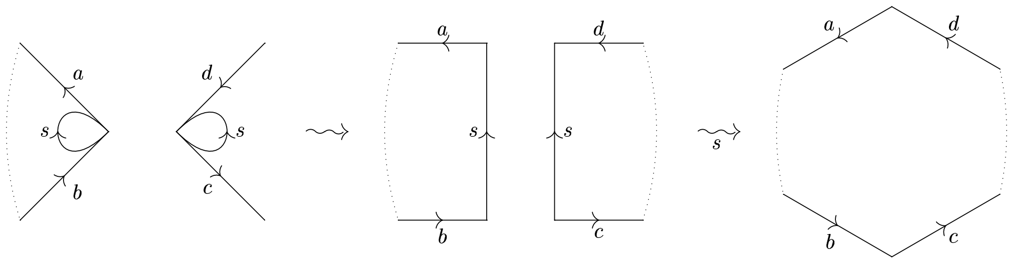

Abbildung 8: Beweis von Lemma 10

Bemerkung. Die Eindeutigkeit der obigen Darstellung folgt mit der Eulercharakteristik.

Literatur

[Bröcker, Jänich] Bröcker, Jänich: *Differentialtopologie*, Heidelberger Taschenbücher.

[Dieck] Tom Dieck: *Topologie*, de Gruyter.

[Massey] William S. Massey: *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer.

[Radó] Tibor Radó: *Über den Begriff der Riemannschen Fläche*, Acta Litt. Sci.Szeged., 2, 1925, pp. 101-121.

[Seifert, Threlfall] Seifert, Threlfall: *Lehrbuch der Topologie*, Chelsea Publishing Company, New York, 1980.