

Mathematik oder Numerogeopoesie?

Eine Stunde Mathematik-Didaktik. 05/2023. Regensburg

Clara Löh

Fakultät für Mathematik. Universität Regensburg



Präzision und Struktur in der Mathematik

Mathematik

- ▶ ist **strukturiert** und
- ▶ basiert auf **präzisen** Begriffen und Schlussweisen.

Strukturbildende Elemente:

- ▶ Definitionen
- ▶ Sätze
- ▶ Beweise
- ▶ Beispiele
- ▶ Algorithmen
- ▶ Anwendungen

Ziel des Mathematikunterrichts sollte u.a. sein,

- ▶ Präzision im Denken,
- ▶ Präzision in der Ausdrucksweise und in der Argumentation
- ▶ sowie die Freude am kritischen Hinterfragen zu vermitteln.

Wozu? Für die Mathematik an sich, als Vorbereitung auf eine etwaige MINT-Ausbildung und auf dem Weg zum mündigen Bürger

Präzision und Struktur in Mathematik-Schulbüchern

Mathematik-Schulbücher sind in systematischer Weise

- ▶ unstrukturiert und
- ▶ unpräzise.

Die strukturbildenden Elemente Definitionen, Sätze, Beweise, Beispiele, Algorithmen und Anwendungen werden vermischt.

Konsequenzen:

- ▶ Es entsteht ein diffuses, kein präzises, Bild der Mathematik.
- ▶ Die Mathematik-Kenntnisse sind nicht robust.

Mathematik-Schulbuchtexte sind nicht nachvollziehbar.

Insbesondere können

- ▶ schwächere Schüler damit Lücken nicht füllen
- ▶ stärkere Schüler damit nicht selbständig weitere Themen lernen; Neugierde wird aktiv gebremst.

Selbstversuch

Frage

- ▶ Wie verständlich/unverständlich sind Schulbuchtexte?
- ▶ Was verstehen Schulbücher unter „klar strukturiert unterrichten“?

Lässt sich einfach ausprobieren!

Zwei Beispielthemen aus Klasse 5 (Gymnasium, Bayern):

- ▶ schriftliche Division
- ▶ Geraden

Damit wir nicht von unseren vorhandenen Kenntnissen gestört werden, werden wir beide Themen **leicht variieren**.

Die Beispiele basieren auf *Delta 5 Bayern (2017)*; die unterliegenden Probleme treffen aber ebenso auf die anderen gängigen Mathematik-Schulbücher (Gymnasium, 5. Klasse, Bayern) zu.

Schriftliche Division zur Basis 8

Bei der **schriftlichen Division** geht man schrittweise vor und fasst beim Dividenten von links nach rechts jeweils so viele Ziffern zu einer Zahl zusammen, dass der Divisor in dieser Zahl enthalten ist.

$$\begin{array}{r} 6372 : 27 = 22 \text{ R } 12 \\ \underline{-56} \downarrow \\ 57 \\ \underline{-56} \downarrow \\ 12 \end{array}$$

27 geht in 63 zweimal, notiere 2
 $2 \cdot 27 = 56$, $63 - 56 = 5$, Rest 5
 27 geht in 57 zweimal, notiere 2
 $2 \cdot 27 = 56$, $57 - 56 = 1$, Rest 1

Aufgabe. $1111 : 23 = ?$

Schriftliche Division

Probleme der obigen Darstellung:

- ▶ Was passiert, wenn der Divisor größer ist als der Dividend?
(wichtig für eine algorithmische Umsetzung/Programmierung)
- ▶ Woher weiß man, wie oft der Divisor in die jeweilige Zahl passt?
 - ▶ **Schätzen**: Wie geht man damit um, wenn man sich verschätzt hat?
 - ▶ Welche **Alternativen** gibt es **zum Schätzen**?
- ▶ Warum funktioniert das Verfahren?

Geraden auf Blorxisch

- ▶ Eine **Blorxe** \overline{AB} ist die geradlinige Verbindung zwischen zwei Qurxen A und B . Eine Blorxe ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Qurxen. Mann kann ihre **Länge** messen, die mit $|\overline{AB}|$ bezeichnet wird.
- ▶ Verlängert man die Blorxe geradlinig über beide Endpunkte unendlich weit hinaus, so erhält man die **Fizze** AB .
- ▶ Zwei Fizzen g und h , die miteinander einen Roaar bilden, stehen aufeinander schwurp. Man sagt „ h steht **schwurp** auf g “ oder „ h ist ein **Pfiit** zu g “ und schreibt $h \perp g$.
- ▶ Zwei Fizzen g und k , für die es eine gemeinsame Schwurpe h gibt, liegen **oink zueinander**. Man schreibt dafür $g \parallel k$. Zueinander oinke Fizzen schneiden sich nicht.
- ▶ Lage zweier Fizzen: Zwei Fizzen könne sich in einem Qurx schneiden, oink zueinander verlaufen oder aufeinander liegen.

Aufgabe. Sind Fizzen zu sich selbst oink?

Geraden

- ▶ Eine **Strecke** \overline{AB} ist die geradlinige Verbindung zwischen zwei Punkten A und B . Eine Strecke ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten. Man kann ihre **Länge** messen, die mit $|\overline{AB}|$ bezeichnet wird.
- ▶ Verlängert man die Strecke geradlinig über beide Endpunkte unendlich weit hinaus, so erhält man die **Gerade** AB .
- ▶ Zwei Geraden g und h , die miteinander einen rechten Winkel bilden, stehen aufeinander senkrecht. Man sagt „ h steht **senkrecht** auf g “ oder „ h ist ein **Lot** zu g “ und schreibt $h \perp g$.
- ▶ Zwei Geraden g und k , für die es eine gemeinsame Senkrechte h gibt, liegen **parallel zueinander**. Man schreibt dafür $g \parallel k$. Zueinander parallele Geraden schneiden sich nicht.
- ▶ Lage zweier Geraden: Zwei Geraden können sich in einem Punkt schneiden, parallel zueinander verlaufen oder aufeinander liegen.

Aufgabe. Sind Geraden zu sich selbst parallel?

Probleme der obigen Darstellung:

- ▶ Es ist nicht klar, was Definitionen sind bzw. was Sätze über die soeben definierten Begriffe sind.
- ▶ Die Definitionen verwenden undefinierte Begriffe.
- ▶ Randfälle werden nicht behandelt.
(sind wichtig für Robustheit und Programmierung)

Weitere Beispiele aus dem Präzisionsgruselkabinett

- ▶ Zeige, dass die Behauptung „Es gibt nur eine Gerade, auf der alle Punkte liegen, die den Abstand 2cm von der Geraden g haben.“ falsch ist.
[Delta, 5, Bayern; 2017, S. 119]
- ▶ In einem **Drachenviereck** sind jeweils zwei benachbarte Seiten gleich lang.
[Fokus, 5, Bayern; 2016, S. 84]
- ▶ Folgende Aussage soll bewiesen werden:
„Eine Zahl ist nur durch 10 teilbar, wenn sie die Einerziffer 0 besitzt.“
Beweis: Jede Zahl mit der Einerziffer 0 kann als Produkt von 10 und derjenigen Zahl geschrieben werden, die man durch Weglassen der Ziffer 0 in der Ausgangszahl erhält.
[Lambacher Schweizer, 5, Bayern; 2017, S. 20]

Für diese Beispiele war keine mühsame oder langwierige Suche nötig!

Verbesserungsvorschläge

- ▶ Systematisch zwischen den strukturbildenden Elementen unterscheiden, spätestens ab Klasse 5
- ▶ Präzise formulieren und argumentieren
- ▶ Keine „magischen“ unerklärten Schritte/Begriffe verwenden
- ▶ Randfälle berücksichtigen
- ▶ Begründungen/Beweise liefern (soweit möglich)
- ▶ Den strukturellen Unterschied zu Geisteswissenschaften einerseits und Naturwissenschaften andererseits vermitteln
- ▶ Mathematik so darstellen, wie sie wirklich ist!
Dann wird sie **nachvollziehbar** und **interessant** ...