Instructions for Obstructions

Clara Strohm (strohm@math.uni-muenster.de)

8. Mai 2002

Wir untersuchen im folgenden die Fragestellung, wann eine Abbildung von einem Unterkomplex auf den ganzen Komplex fortgesetzt werden kann und wieviele Homotopieklassen solcher Fortsetzungen es dann gibt. Dazu gehen wir gerüstweise vor. Es wird sich herausstellen, dass die Fortsetzbarkeit vom Verschwinden gewisser Kohomologieklassen abhängt. (Diese sind sogar – was hier nicht gezeigt wird – durch "einfache" Operationen berechenbar).

1 Einführung – einfache Fälle

Sei (X, A) ein relativer CW-Komplex, Y nichtleer und $f\colon A \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Dass f auf das Nullgerüst X_0 fortgesetzt werden kann, ist klar. Sei nun E eine Einszelle mit charakteristischer Abbildung $h\colon (\Delta^1, \partial\Delta^1) \longrightarrow (X_1, X_0)$, d.h. die Punkte

$$y_0 := f(h(0,1)) \text{ und } y_1 := f(h(1,0))$$

liegen in Y. Also kann f genau dann auf E fortgesetzt werden, wenn y_0 und y_1 in derselben Wegzusammenhangskomponente von Y liegen. Insbesondere gilt:

Bemerkung. Ist Y wegzusammenhängend, so kann jede Abbildung $f\colon (X, A) \longrightarrow Y$ auf das Einsgerüst fortgesetzt werden. $\square$

2 Vorbereitungen

Für den allgemeinen Fall benötigen wir die Operation der Fundamentalgruppe auf den höheren Homotopiegruppen und eine allgemeine Version der Hurewiczsätze.

2.1 Die Operation von π_1 auf π_n

Definition. Sei Y ein topologischer Raum. Dann ist der **Fundamentalgruppoid** $\Pi(Y)$ von Y die Kategorie,

- deren Objekte die Punkte von Y sind, und

- in der die Morphismen zwischen $y_0, y_1 \in Y$ gerade die Homotopieklassen von Wegen (relativ $\{0,1\}$) von y_0 nach y_1 sind.

Sei (X, x_0) ein wohlpunktierter und Y ein topologischer Raum. Wir definieren einen Funktor

$$\tau\colon \Pi(Y) \longrightarrow \text{Mengen}$$

wie folgt: Wir setzen

$$\forall_{y \in Y} \quad \tau(y) := [(X, x_0), (Y, y)]$$

(und meinen damit punktierte Homotopieklassen). Sind $y_0, y_1 \in Y$ und $w\colon [0,1] \longrightarrow Y$ mit $w(0) = y_0, w(1) = y_1$, sowie $f\colon (X, x_0) \longrightarrow (y, y_0)$, so existiert – da $\{x_0\} \hookrightarrow X$ eine Kofaserung ist – eine Homotopie $h\colon X \times [0,1] \longrightarrow Y$ mit

$$h_0 = f \text{ und } h(x_0, \cdot) = w$$

(eine sog. **freie Homotopie** längs w). Dann ist h_1 eine Abbildung $(X, x_0) \longrightarrow (Y, y_1)$ und wir setzen

$$\tau_{[w]}([f]) := [h_1].$$

D.h.

$$\tau_{[w]}\colon [(x, x_0), (Y, y_0)] \longrightarrow [(X, x_0), (Y, y_1)].$$

Dass dies tatsächlich alles hübsch wohldefiniert ist, wird in [Wh, p. 99f.] gezeigt.
Wir betrachten nun folgende Spezialfälle: Für $X = S^1$ erhalten wir den Funktor

$$\begin{aligned} \tau\colon \Pi(Y) &\longrightarrow \text{Gruppen} \\ y &\mapsto \pi_1(Y, y) \end{aligned}$$

und für $X = S^n$ (mit $n \in \mathbf{N}_{\geq 2}$) den Funktor

$$\begin{aligned} \tau\colon \Pi(Y) &\longrightarrow \text{Abel} \\ y &\mapsto \pi_n(Y, y)\,. \end{aligned}$$

Bemerkung. Zu $n \in \mathbf{N}$ und $y \in Y$ liefern diese Funktoren durch Einschränkung also eine Operation von $\pi_1(Y, y)$ auf $\pi_n(Y, y)$. □

Definition. Sei $n \in \mathbf{N}$. Ein topologischer Raum Y heisst **n-einfach**, wenn für jeden Grundpunkt $y_0 \in Y$ die Fundamentalgruppe $\pi_1(Y, y_0)$ trivial auf der n-ten Homotopiegruppe $\pi_n(Y, y_0)$ operiert.

Bemerkung. Ein Raum ist genau dann 1-einfach, wenn seine Fundamentalgruppe (zu jedem Grundpunkt) abelsch ist.

Lemma 1. *Sei Y ein wegzusammenhängender n-einfacher Raum und $y_0, y_1 \in Y$. Dann gibt es genau einen durch den Funktor τ induzierten Isomorphismus*

$$\pi_n(Y, y_0) \longrightarrow \pi_n(Y, y_1)\,,$$

d.h. Jede Abbildung $(S^n, 1) \longrightarrow Y$ bestimmt ein wohldefiniertes Element in $\pi_n(Y)$.

Beweis. Klar. □

Analog gibt es auch einen Funktor τ', der eine Operation der relativen Fundamentalgruppe auf den relativen Homotopiegruppen induziert (siehe etwa [Wh, p. 101]).

Definition. Sei (Y, y) ein zusammenhängender topologischer Raum und $n \in \mathbf{N}$. Dann schreiben wir $\omega_n(Y, y)$ für die Untergruppe von $\pi_n(Y, y)$, die durch die Elemente der Form $\alpha - \tau_\xi(\alpha)$ mit $\xi \in \pi_1(Y, y), \alpha \in \pi_n(Y, y)$ erzeugt wird. Ausserdem definieren wir

$$\pi_n^*(Y, y) := \pi_n(Y, y) / \omega_n(Y, y).$$

Lemma 2. *Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Dann gilt*

$$f_*(\omega_n(X)) \subset \omega_n(Y).$$

Beweis. Sei $\xi \in \pi_1(Y, y)$ und $\alpha \in \pi_n(Y, y)$ Dann folgt aus der Definition der freien Homotopie, dass

$$f_*(\tau_\xi(\alpha)) = \tau_{f(\xi)}(f_*(\alpha)),$$

und damit die Behauptung. □

Definition. Sei (Y, A, y) ein Paar topologischer Räume und $n \in \mathbf{N}$. Dann schreiben wir $\omega_n'(Y, A, y)$ für die Untergruppe von $\pi_n(Y, A, y)$, die durch die Elemente der Form $\alpha - \tau_\xi'(\alpha)$ mit $\xi \in \pi_1(A, y), \alpha \in \pi_n(Y, A, y)$ erzeugt wird. Ausserdem definieren wir

$$\pi_n^\dagger(Y, A, y) := \pi_n(Y, A, y) / \omega_n'(Y, A, y).$$

Dabei gilt (s. [Wh] IV(3.1)) für den Randoperator aus der Homotopie-Paarsequenz des Paares (X_{n+1}, X_n)

$$\partial_*(\omega_{n+1}'(X_{n+1}, X_n)) \subset \omega_n(X_n).$$

2.2 Hurewiczsätze

Um später eine "globale" Beschreibung der Hindernisse zu erhalten, benötigen wir eine allgemeinere Form der Hurewiczsätze:

Satz (Absolute Version des Satzes von Hurewicz). *Sei $n \in \mathbf{N}_{\geq 1}$ und Y ein $(n-1)$-zusammenhängender topologischer Raum. Dann induziert der Hurewiczhomomorphismus $\rho\colon \pi_n(Y) \longrightarrow H_n(Y)$ einen Isomorphismus*

$$\pi_n^*(Y) \longrightarrow H_n(Y).$$

Satz (Relative Version des Satzes von Hurewicz). *Sei $n \in \mathbf{N}_{\geq 2}$ und (Y, A) ein $(n-1)$-zusammenhängendes Paar. Dann wird durch den relativen Hurewiczhomomorphismus $\rho\colon \pi_n(Y, A) \longrightarrow H_n(Y, A)$ ein Isomorphismus*

$$\pi_n^\dagger(Y, A) \longrightarrow H_n(Y, A)$$

induziert.

Zum Beweis siehe [Wh, IV.7].

3 Hindernisse zur Fortsetzung einer Abbildung

Im folgenden sei (X, A) ein relativer CW-Komplex mit der Filtrierung $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ und Y ein wegzusammenhängender n-einfacher Raum. Weiter sei $f\colon X_n \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung.

3.1 Lokale Beschreibung

Seien $(E_\alpha^{n+1})_{\alpha\in J}$ die $(n+1)$-Zellen von (X, A) und $h_\alpha\colon (\Delta^{n+1}, \partial\Delta^{n+1}) \longrightarrow (X_{n+1}, X_n)$ charakteristische Abbildungen. Sei $\alpha \in J$. Da Y nach Voraussetzung n-einfach ist, repräsentiert die Komposition

$$f \circ h_\alpha|_{\partial\Delta^{n+1}}\colon \partial\Delta^{n+1} \longrightarrow X_n \longrightarrow Y$$

ein Element $c_\alpha \in \pi_n(Y)$. Durch die Zuordnung

$$e_\alpha \mapsto c_\alpha$$

erhalten wir also eine Funktion der Basis $(e_\alpha)_{\alpha\in J}$ des Zellenkomplexes $\Gamma_{n+1}(X, A)$ in die abelsche Gruppe $\pi_n(Y)$. Diese können wir zu einem Homomorphismus $\Gamma_{n+1}(X, A) \longrightarrow \pi_n(Y)$ (von $\mathbf{Z}$-Moduln) fortsetzen, was gerade einem Element

$$c^{n+1}(f) \in \Gamma^{n+1}(X, A; \pi_n(Y)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\Gamma_{n+1}(X, A), \pi_n(Y))$$

entspricht.

Definition. Die Kokette $c^{n+1}(f)$ heisst **Hindernis zur Fortsetzung von** f.

3.2 Globale Beschreibung

Sei $\rho\colon \pi_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \longrightarrow H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \cong \Gamma_{n+1}(X, A)$ der Hurewiczhomomorphismus und ∂_* der Randoperator aus der Homotopie-Paar-Sequenz von (X_{n+1}, X_n):

$$\Gamma_{n+1}(X, A) \xleftarrow{\;\rho\;} \pi_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \xrightarrow{\;\partial_*\;} \pi_n(X_n) \xrightarrow{\;f_*\;} \pi_n(Y)$$

Dies liefert uns eine "globale" Beschreibung des Hindernisses $c^{n+1}(f)$.

Lemma 3. *Dann ist $f_* \circ \partial_* \circ \rho^{-1}$ ein wohldefinierter Homomorphismus und*

$$c^{n+1}(f) = f_* \circ \partial_* \circ \rho^{-1}.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Wohldefiniertheit: Nach dem relativen Satz von Hurewicz ist ρ surjektiv (das Paar (X_{n+1}, X_n) ist n-zusammenhängend) und

$$\ker\rho = \omega'_{n+1}(X_{n+1}, X_n).$$

Ausserdem gilt (s.o. bzw. da Y als n-einfach vorausgesetzt ist)

$$\partial_*(\omega'_{n+1}(X_{n+1}, X_n)) \subset \omega_n(X_n) \text{ und } f_*(\omega_n(X_n)) \subset \omega_n(Y) = 0,$$

und damit $f_* \circ \partial_*(\omega'_{n+1}(X_{n+1}, X_n)) = 0$. Also kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \pi^{\dagger}_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \arrow[dl, dashed, "\cong"'] \arrow[drr, dashed] & & \\
\Gamma_{n+1}(X, A) & \pi_{n+1}(X_{n+1}, x_n) \arrow[l] \arrow[u, two heads] \arrow[r, "\partial_*"'] & \pi_n(X_n) \arrow[r, "f_*"'] & \pi_n(Y)
\end{tikzcd}$$

d.h. $f_* \circ \partial_* \circ \rho^{-1}$ ist ein wohldefinierter Homomorphismus. Dass $c^{n+1}(f) = f_* \circ \partial_* \circ \rho^{-1}$ ist, folgt aus der Definition des Randoperators bzw. des Hurewiczhomomorphismus und der Gestalt des Isomorphismus $\Gamma_{n+1}(X, A) \cong H_{n+1}(X_{n+1}, X_n)$. □

3.3 Grundlegende Eigenschaften

Bemerkung. Das Hindernis $c^{n+1}(f)$ besitzt die folgenden Eigenschaften:

- Für jede $(n+1)$-Zelle E^{n+1}_α von (X, A) gilt: Die Abbildung $f|_{\partial E^{n+1}_\alpha}$ kann genau dann auf E^{n+1}_α fortgesetzt werden, wenn $c^{n+1}(f)(e^{n+1}_\alpha) = 0$ ist.
- Die Abbildung $f\colon X_n \longrightarrow Y$ kann genau dann auf ganz X_{n+1} fortgesetzt werden, wenn $c^{n+1}(f) = 0$ ist.
- Ist (X', A') ein relativer CW-Komplex und $g\colon (X', A') \longrightarrow (X, A)$ eine zelluläre Abbildung, so ist
$$c^{n+1}\left(f \circ (g|_{X'_n})\right) = g^\sharp \circ c^{n+1}(f),$$
wobei wir mit $g^\sharp$ die von g induzierte Abbildung auf den Zellenkomplexen bezeichnen.
- Ist Y' ein weiterer n-einfacher Raum und $h\colon Y \longrightarrow Y'$, so ist
$$c^{n+1}(h \circ f) = h_* \circ c^{n+1}(f).$$
- Ist $f_0 \simeq f_1\colon X_n \longrightarrow Y$, so ist
$$c^{n+1}(f_0) = c^{n+1}(f_1).$$

Beweis. Die ersten beiden Aussagen folgen direkt aus der lokalen Beschreibung, die anderen aus der globalen. □

Satz. *Das Hindernis $c^{n+1}(f)$ ist ein Kozykel.*

Beweis. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H_{n+2}(X_{n+2}, X_{n+1}) \arrow[d, "\partial_1"'] & \pi_{n+2}(X_{n+2}, X_{n+1}) \arrow[l, "\rho_1"'] \arrow[d, "\partial_2"] & & \\
H_{n+1}(X_{n+1}) \arrow[d, "i_1"'] & \pi_{n+1}(x_{n+1}) \arrow[l, "\rho"'] \arrow[d, "i_2"] & & \\
H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) & \pi_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \arrow[l, "\rho_2"'] \arrow[r, "\partial_3"'] & \pi_n(X_n) \arrow[r, "f_*"'] & \pi_n(Y).
\end{tikzcd}$$

Dabei bezeichnen wir mit ρ die Hurewicz- und mit ∂ die Randoperatoren der entsprechenden Homologie- bzw. Homotopiesequenzen. Die is stehen für die Inklusionen. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}(-1)^{n+1}(\delta c^{n+1}(f)) \circ \rho_1 &= (c^{n+1}(f) \circ i_1 \circ \partial_1) \circ \rho_1 \\ &= f_* \circ \partial_3 \circ \rho_2^{-1} \circ i_1 \circ \partial_1 \circ \rho_1 \\ &= f_* \circ \partial_3 \circ \rho_2^{-1} \circ \rho_2 \circ i_2 \circ \partial_2 \\ &= f_* \circ \partial_3 \circ i_2 \circ \partial_2.\end{aligned}$$

Da i_2 und ∂_3 in der Homotopiesequenz des Paares (X_{n+1}, X_n) aufeinanderfolgen, ist $\partial_3 \circ i_2 = 0$, und damit $(\delta c^{n+1}(f)) \circ \rho_1 = 0$. Mit der Surjektivität des Hurewiczhomomorphismus ρ_1 folgt also

$$\delta c^{n+1}(f) = 0.$$

□

4 Die Differenzkokette

Wie immer sind wir nicht nur an den Eigenschaften von Abbildungen, sondern auch an den Eigenschaften entsprechender Homotopien interessiert.

4.1 Definition

Sei $(\hat{X}, \hat{A}) := I \times (X, A)$, d.h. $(\hat{X}, \hat{A})$ ist ein relativer CW-Komplex, wobei

$$\hat{X}_n = I \times X_{n-1} \cup \partial I \times X_n.$$

Jede Abbildung $F\colon \hat{X}_n \longrightarrow Y$ besteht aus einem Paar $f_0, f_1\colon X_n \longrightarrow Y$ von Abbildungen und einer Homotopie $G\colon I \times X_{n-1} \longrightarrow Y$ zwischen $f_0|_{X_{n-1}}$ und $f_1|_{X_{n-1}}$. (Dabei betrachten wir I als CW-Komplex mit den beiden Nullzellen $\{0\}$ und $\{1\}$ und einer Einszelle i mit $\partial i = 1 - 0$.) Sei $d^n(f_0, G, f_1) := d^n(F) \in \Gamma^n(X, A; \pi_n(Y))$ die Abbildung, die gegeben ist durch

$$\forall_{c \in \Gamma_n(X,A)} \quad d^n(F)(c) := (-1)^n c^{n+1}(F)(i \times c).$$

Definition. Das Element $d^n(f_0, G, f_1) \in \Gamma^n(X, A; \pi_n(Y))$ heisst **Differenzkokette von** (f_0, f_1) **bezüglich** G.

Ausserdem gibt es auch zur Differenzkokette eine lokale Beschreibung (s. [Wh, p. 231]).

4.2 Grundlegende Eigenschaften

Analog zur entsprechenden Bemerkung über Hindernisse folgt:

Bemerkung. Die Differenzkokette besitzt die folgenden Eigenschaften:

- Für jede n-Zelle E^n_α von (X, A) gilt: Die Einschränkung $F|_{\partial(I \times E^n_\alpha)}$ kann genau dann auf $I \times E^n_\alpha$ fortgesetzt werden, wenn $d^n(e^n_\alpha) = 0$ ist.

- Es gibt genau dann eine Homotopie von f_0 und f_1, die die Homotopie G fortsetzt, wenn $d^n(f_0, G, f_1) = 0$ ist.
- Ist (x', A') ein relativer CW-Komplex, $g\colon (X', A') \longrightarrow (X, A)$ eine zelluläre Abbildung und $g'\colon \hat{X}'_n \longrightarrow \hat{X}_n$ die Einschränkung von $1 \times g$, so ist
$$d^n(F \circ g') = g^\sharp \circ d^n(F).$$
- Ist Y' ein weiterer n-einfacher Raum und $h\colon Y \longrightarrow Y'$, so ist
$$h_* \circ d^n(F) = d^n(h \circ F).$$
- Ist $F \simeq F'\colon \hat{X}_n \longrightarrow Y$, so ist
$$d^n(F) = d^n(F'). \qquad \square$$

5 Eine exakte Sequenz mit Hindernissen

Wir zeigen im folgenden, dass es eine exakte Sequenz der Form

$$[X_{n+1}, Y] \longrightarrow \operatorname{im}\big([x_n, Y] \to [X_{n-1}, Y]\big) \xrightarrow{[c^{n+1}(\,\cdot\,)]} H^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$$

gibt.
Die Differenzkokette $d^n(f_0, G, f_1)$ ist im allegemeinen kein Kozykel. Aber $\delta d^n(f_0, G, f_1)$ lässt sich aus den Hindernissen $c^{n+1}(f_0)$ und $c^{n+1}(f_1)$ berechnen:

Satz. *In der obigen Situation gilt*

$$\delta d^n(f_0, G, f_1) = c^{n+1}(f_1) - c^{n+1}(f_0).$$

Beweis. Sei $c \in \Gamma_{n+1}(X, A)$. Da $c^{n+1}(F)$ ein Kozykel ist, folgt

$$\begin{aligned} 0 &= (-1)^{n+1}\delta c^{n+1}(F)(i \times \partial c) \\ &= c^{n+1}(F)(\partial(i \times c)) \\ &= c^{n+1}(F)(1 \times c - 0 \times c - i \times \partial c). \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} c^{n+1}(F(0 \times c)) &= c^{n+1}(f_0)(c) \\ c^{n+1}(F(1 \times c)) &= c^{n+1}(f_1)(c) \end{aligned}$$

erhalten wir daraus (mit der Definition von $d^{n+1}(F)$)

$$\begin{aligned} c^{n+1}(f_1)(c) - c^{n+1}(f_0)(c) &= c^{n+1}(F)(i \times \partial c) \\ &= (-1)^n d^n(F)(\partial c) \\ &= \delta d^n(F)(c). \end{aligned} \qquad \square$$

Satz. *Sei* $f\colon X_n \longrightarrow Y$. *Dann kann* $f|_{X_{n-1}}$ *genau dann auf* X_{n+1} *fortgesetzt werden, wenn* $c^{n+1}(f) \sim 0$ *ist.*

Wir benötigen folgendes Lemma:

Lemma 4. *Sei* $F_0\colon 0 \times X_n \cup I \times X_{n-1} \longrightarrow Y$ *eine Abbildung und* $d \in \Gamma^n(X, A; \pi_n(Y))$. *Dann gibt es eine Fortsetzung* $F\colon \hat{X}_n \longrightarrow Y$ *von* F_0 *mit*

$$d^n(F) = d.$$

Der (nicht sehr schwierige) Beweis findet sich in [Wh, p. 232f.]. Nun zum Beweis des Satzes:

Beweis. Sei $f'\colon X_{n+1} \longrightarrow Y$ eine Fortsetzung von $f|_{X_{n-1}}$, d.h. $c^{n+1}(f') = 0$. Wir betrachten die Funktion $F\colon \hat{X}_n \longrightarrow Y$, die gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \forall_{x\in X_n} \quad & F(0,x) := f'(x) \text{ und } F(1,x) := f(x) \\ \forall_{x\in X_{n-1}} \quad \forall_{t\in I} \quad & F(t,x) := f(x) = f'(x). \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \delta d^n(F) &= c^{n+1}(f) - c^{n+1}(f'|_{X_n}) \\ &= c^{n+1}(f), \end{aligned}$$

und damit $c^{n+1}(f) \sim 0$.
Sei andersherum $c^{n+1}(f) = \delta d$ für ein $d \in \Gamma^n(X, A; \pi_n(Y))$. Nach obigem Lemma existiert eine Abbildung $F\colon \hat{X}_n \longrightarrow Y$, so dass

$$\begin{aligned} \forall_{x\in X_n} \quad & F(0,x) = f(x) \\ \forall_{x\in X_{n-1}} \quad \forall_{t\in I} \quad & F(t,x) = f(x) \end{aligned}$$

und $d^n(F) = -d$. Wir definieren nun $f'\colon X_n \longrightarrow Y$ durch

$$\forall_{x\in X_n} \quad f'(x) := F(1,x).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} c^{n+1}(f) &= \delta d \\ &= -\delta d^n(F) \\ &= c^{n+1}(f) - c^{n+1}(f'), \end{aligned}$$

und damit $c^{n+1}(f') = 0$. Also können wir f' fortsetzen auf X_{n+1}. Wegen $f'|_{X_{n-1}} = f|_{X_{n-1}}$ liefert dies aber die gewünschte Fortsetzung von $f|_{X_n-1}$ auf X_{n+1}. $\square$

Ein analoger Satz gilt auch für die Differenzen. (s. [Wh, p. 235]. Der letzte Satz liefert uns den wesentlichen Teil der angestrebten exakten Sequenz:

Satz. *Es gibt eine exakte Sequenz der Form*

$$[X_{n+1}, Y] \longrightarrow \operatorname{im}\big([x_n, Y] \to [X_{n-1}, Y]\big) \xrightarrow{[c^{n+1}(\,\cdot\,)]} H^{n+1}(X, A; \pi_n\,(Y))$$

Beweis. Nach dem letztenn Satz genügt es zu zeigen, dass die rechte Abbildung wohldefiniert ist: Seien also $f_n, g_n \colon X_n \longrightarrow Y$ Abbildungen mit $f_n|_{X_{n-1}} \simeq g_n|_{X_{n-1}}$. Wir betrachten die Funktion $F \colon \hat{X}_n \longrightarrow Y$, die gegeben ist durch

$$\forall_{x \in X_n} \quad F(0, x) := f_n(x) \text{ und } F(1, x) := g_n(x)$$

und eine Homotopie $F|_{X_{n-1} \times I} \colon f_n \simeq g_n$. Dann ist

$$\delta(f_n, F, f_1) = c^{n+1}\,(f_n) - c^{n+1}\,(g_n)\,,$$

und damit $c^{n+1}\,(f_n) \sim c^{n+1}\,(g_n)$. Also ist die rechte Abbildung $[c^{n+1}\,(\,\cdot\,)] \colon \operatorname{im}\big([X_n, Y] \to [X_{n-1}, Y]\big) \longrightarrow H^{n+1}(\Gamma^{n+1}\,(X, A; \pi_n\,(Y))) \cong H^{n+1}(X, A; \pi_n\,(Y))$ wohldefiniert. □

6 Eine Menge Hindernisse

Sei $\mathcal{O}'_{n+1}(f) \subset \Gamma^{n+1}\,(X, A; \pi_n\,(Y))$ die Menge aller Hindernisse, die bei der Fortsetzung von $f \colon A \longrightarrow Y$ auf X_n auftreten. Stimmen zwei Fortsetzungen auf X_{n-1} überein, so haben wir bereits gezeigt, dass die entsprechenden Hindernisse kohomolog sind. Andersherum gilt:

Lemma 5. *Jeder Kozykel, der kohomolog ist zu einem Hindernis, ist selber ein Hindernis.*

Beweis. Sei $f_n \colon X_n \longrightarrow Y$ eine Forsetzung von $f \colon A \longrightarrow Y$ und $c \in \Gamma^{n+1}\,(X, A; \pi_n\,(Y))$ ein Kozykel mit $c \sim c^{n+1}\,(f)$, etwa

$$c - c^{n+1}\,(f) = \delta d.$$

Dann ist c ein Hindernis, denn: Nach Lemma 4 existiert eine Abbildung $F \colon \hat{X}_n \longrightarrow Y$ mit

$$\begin{aligned} \forall_{x \in X_n} \quad F(0, x) &= f_n(x) \\ \forall_{x \in X_{n-1}} \quad \forall_{t \in I} \quad F(t, x) &= f_n(x) \end{aligned}$$

und $d^n\,(F) = -d$. Wir definieren $g_n \colon X_n \longrightarrow Y$ durch

$$\forall_{x \in X_n} \quad g_n(x) := F(1, x).$$

Also ist $g_n|_{X_{n-1}} = f_n|_{X_{n-1}}$ und

$$\begin{aligned} c &= \delta d + c^{n+1}\,(f_n) \\ &= -d^n\,(F) + c^{n+1}\,(f_n) \\ &= -c^{n+1}\,(f_n) + c^{n+1}\,(g_n) + c^{n+1}\,(f_n) \\ &= c^{n+1}\,(g_n)\,. \end{aligned}$$

□

Also ist die Menge $\mathcal{O}'_{n+1}(f)$ eine Vereinigung von Kohomologieklassen. Daher können wir $\mathcal{O}'_{n+1}(f)$ als Teilmenge $\mathcal{O}_{n+1}(f) \subset H^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$ auffassen.

Definition. Die Menge $\mathcal{O}_{n+1}(f) \subset H^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$ der Kohomologieklassen der Hindernisse zur Forsetzung von f auf X_n heisst **$(n+1)$-dimensionale Hindernismenge von** f.

Dann gilt natürlich:

Satz. *Die Abbildung $f\colon A \longrightarrow Y$ kann genau dann auf X_{n+1} fortgesetzt werden, wenn $0 \in \mathcal{O}_{n+1}(f)$ ist.* □

Allerdings hilft dies erst dann wirklich weiter, wenn wir die Menge $\mathcal{O}_{n+1}(f)$ konkret berechnen können.

Literatur

[Wh] Whitehead, George W. *Elements of Homotopy Theory*, Springer. (vergriffen, keine Neuauflage).