Stationäre Maße und Zeitmittel

Clara Strohm[1] SS 2003 Seminar Wahrscheinlichkeitstheorie

Wir untersuchen im folgenden das Langzeitverhalten – in diesem Fall (gleichmäßige) Konvergenz im Césaro-Mittel – diskreter, zeitlich homogener Markovketten. Da Markovketten im allgemeinen aber nicht anzusehen ist, ob sie im Césaro-Mittel konvergieren, machen wir einen kleinen Umweg: Es zeigt sich, daß jede Grenzverteilung bezüglich des Césaro-Mittels bereits ein stationäres Maß für die Markovkette ist. Daher werden wir zunächst versuchen, stationäre Maße zu finden und zu verstehen. Wenn die Kette (positiv) rekurrent ist, sind diese stationären Maße beinahe eindeutig und haben außerdem den erfreulichen Nebeneffekt, Grenzverteilungen der gewünschten Form zu sein. Für transiente Markovketten hingegen lassen sich im allgemeinen keine Aussagen über die Existenz oder Eindeutigkeit von stationären Maßen machen. Insbesondere gilt dies damit auch für Grenzverteilungen im Césaro-Mittel.

Die Darstellung folgt im Großen und Ganzen [Alsmeyer, Kapitel 10].

[1] strohm@math.uni-muenster.de
http://omega.sdf-eu.org/prob/

1 ▪ Zeitmittel sind stationäre Maße

Im folgenden sei also $M := (M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine zeitlich homogene diskrete Markovkette mit Übergangskern $\mathbf{P}$ auf $(S, \mathcal{S})$ in einem Standardmodell $(\Omega, \mathcal{A}, (M_n)_{n\in\mathbf{N}}, (P_\lambda)_{\lambda\in W})$, wobei W die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(S, \mathcal{S})$ bezeichnet und $(P_\lambda)_{\lambda\in W}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist mit

$$\forall_{\lambda\in W} \quad P_\lambda^M = \lambda \otimes \mathbf{P}^\infty.$$

Für die entsprechenden Erwartungswerte schreiben wir E_λ. Zu jedem $\lambda \in W$ ist $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ also unter P_λ eine diskrete Markovkette mit Startverteilung $P_\lambda^{M_0} = \lambda$ und

$$\forall_{n\in\mathbf{N}} \quad P_\lambda^{M_{n+1} \mid M_n} \underset{P_\lambda}{=} \mathbf{P}(M_n, \cdot\,).$$

Ist $i \in S$, so schreiben wir kurz P_i für P_{δ_i} (und E_i für den Erwartungswert unter P_i).

(Da zeitlich homogene Markovketten durch ihre Anfangsverteilung und den Übergangskern im wesentlichen bestimmt sind, können wir oBdA immer davon ausgehen, daß bereits ein Standardmodell vorliegt.)

Wir versuchen, das Langzeitverhalten dieser diskreten Markovkette zu charakterisieren, d.h. wir suchen Maße ξ, für die die Eigenschaft

$$\forall_{\lambda\in W} \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{A\in\mathcal{S}} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} P_\lambda^{M_k}(A) - \xi(A) \right| = 0$$

(**gleichmäßige Konvergenz im Zeitmittel/Césaro-Mittel**) erfüllt ist.

Die Untersuchung des Langzeitverhaltens führt uns zum Begriff der stationären Maße:

Satz (1.1). *Sei $\lambda \in W$ und ξ ein Maß auf $(S, \mathcal{S})$ mit*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{A\in\mathcal{S}} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} P_\lambda^{M_k}(A) - \xi(A) \right| = 0$$

Dann ist ξ eine stationäre Verteilung von M.

Definition (1.2). Ein **stationäres Maß von** M ist ein σ-endliches nichttriviales Maß ξ auf $(S, \mathcal{S})$ mit

$$\xi = P_\xi^{M_1} = \xi \circ \mathbf{P}.$$

Hat ξ außerdem die Gesamtmasse 1, so heißt ξ auch **stationäre Verteilung von** M.

Ist p die Übergangsmatrix von M, so ist ein σ-endliches Maß $\xi \neq 0$ auf $(S, \mathcal{S})$ genau dann ein stationäres Maß von M, wenn

$$\xi = \xi \cdot p$$

gilt (siehe [Alsmeyer, Satz (5.4)]). In diesem Fall ist ξ also ein Linkseigenvektor von p zum Eigenwert 1.

Beweis. (des Satzes). Die vorausgesetzte gleichmäßige Konvergenz liefert

$$\forall_{A\in\mathcal{S}} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} P_\lambda^{M_k}(A) = \xi(A).$$

Insbesondere folgt $\xi(S) = 1$, d.h. ξ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Es bleibt noch die Invarianz nachzuweisen:

Lemma (1.3). *Für alle beschränkten $(\mathcal{S}, \mathbf{B})$-meßbaren Funktionen $f\colon S \longrightarrow \mathbf{R}$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} E_\lambda(f\circ M_k) = \int f\, d\xi.$$

Beweis. (des Lemmas – durch algebraische Induktion über f). Für charakteristische Funktionen ergibt sich die Behauptung direkt aus der Voraussetzung des Satzes. Durch die Linearität der Integrale und Grenzwerte überträgt sich dies somit auch auf (endliche) Treppenfunktionen über $(S, \mathcal{S})$.

Ist $f\colon S \longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ eine beschränkte $(\mathcal{S}, \mathbf{B})$-meßbare Funktion, so ist f bezüglich jedes Wahrscheinlichkeitsmaßes auf $(S, \mathcal{S})$ integrierbar. Da wir f durch Treppenfunktionen $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ mit

$$\forall_{n\in\mathbf{N}} \quad 0 \leq T_n \leq f$$

approximieren können, folgt mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz die Behauptung für nichtnegative Funktionen.

Der allgemeine Fall ergibt sich hieraus durch Zerlgung in Positiv- und Negativteil, womit das Lemma bewiesen ist. ☐

Sei $A \in \mathcal{S}$. Wir wollen nun das Lemma auf $\mathbf{P}(\,\cdot\,, A)$ anwenden: Zunächst folgt, da alle Grenzwerte existieren, daß

$$\begin{aligned}
\xi(A) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} P_\lambda^{M_k}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n+1} P_\lambda^{M_k}(A) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+2} P_\lambda^{M_0}(A) + \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n} P_\lambda^{M_{k+1}}(A)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+2}\lambda(A) + \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n} P_\lambda^{M_{k+1}}(A)\right) \\
&= 0 + \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} P_\lambda^{M_{k+1}}(A) \\
&= 1\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} P_\lambda^{M_{k+1}}(A).
\end{aligned}$$

Da M zeitlich homogen ist, gilt (siehe [Alsmeyer, S. 8f])

$$\forall_{k\in\mathbf{N}} \quad P_\lambda^{M_{k+1}} = P_\lambda^{M_k} \circ \mathbf{P}.$$

Dann erhalten wir mit dem Lemma (da alle Grenzwerte existieren und $\mathbf{P}(\,\cdot\,, A)$ durch 1 beschränkt und $(\mathcal{S}, \mathbf{B})$-meßbar ist), daß

$$\begin{aligned}
\xi(A) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} P_\lambda^{M_{k+1}}(A) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \big(P_\lambda^{M_k} \circ \mathbf{P}\big)(A) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \int \mathbf{P}(\,\cdot\,, A)\, dP_\lambda^{M_k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} E_\lambda\big(\mathbf{P}(\,\cdot\,, A) \circ M_k\big) \\
&= \int \mathbf{P}(\,\cdot\,, A)\, d\xi \\
&= \xi \circ \mathbf{P}(A).
\end{aligned}$$

D.h. ξ ist eine stationäre Verteilung von M. □

2 ■ Stationäre Maße via zyklischer Zerlegungen

Die zyklische Zerlegung legt bereits einen Kandidaten für ein stationäres Maß nahe:

Liegt Konvergenz im Césaro-Mittel vor, so folgt insbesondere für alle $j \in S$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{A\in\mathcal{S}} \left| E_j\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \chi_A \circ M_k\right) - \xi(A)\right| = 0,$$

d.h. diese Konvergenz beschreibt eine gleichmäßige Konvergenz von mittleren relativen Häufigkeiten – dies erklärt auch die Bezeichnung „Konvergenz im Zeitmittel."

Durch die zyklische Zerlegung bekommen wir eine Möglichkeit, dies zu approximieren: Sei also $i \in S$ ein rekurrenter Zustand und $(\sigma_n(i))_{n\in\mathbf{N}}$ die zugehörigen P_i-fast überall endlichen (da i rekurrent ist) Rückkehrzeiten in diesen Zustand. Wir betrachten nun die Zykeln

$$\forall_{n\in\mathbf{N}} \quad Z'_n := (M_{\sigma_n(i)}, \ldots, M_{\sigma_{n+1}(i)-1}).$$

Dann bilden die $(Z'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ nach [Alsmeyer, Satz (7.12)] unter P_i eine Folge stochastisch unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen. Wegen $M = (Z'_0, Z'_1, Z'_2, \ldots)$ folgt

$$P_i^M = \bigotimes_{n\in\mathbf{N}} P_i^{Z'_n} = \big(P_i^{Z'_0}\big)^\infty.$$

Ist $j \in S$ ein weiterer Zustand, der mit i verbunden ist, so sind die $(\sigma_n(i))_{n\in\mathbf{N}}$ auch unter P_j fast überall endlich (siehe [Alsmeyer, Satz (9.3)]). Daher liefert [Alsmeyer, Satz (7.14)], daß die $(Z'_n)_{n\in\mathbf{N}_{\geq 1}}$ unter P_j stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind mit

$$P_j^{Z'_1} = P_i^{Z'_0}.$$

Also ist $P_j^M = P_j^{Z'_0} \otimes \left(P_i^{Z'_0}\right)^\infty$. Mit dieser Darstellung erhalten wir, daß für $A \in \mathcal{S}$ die mittlere Anzahl

$$E_j\left(\sum_{k=\sigma_n(i)}^{\sigma_{n+1}(i)-1} \chi_A \circ M_k\right)$$

von Aufenthalten in A innerhalb eines Zyklus für alle $n \in \mathbf{N}_{\geq 1}$ identisch (und unabhängig von j) ist. Diese Anzahl ist gerade

$$E_i\left(\sum_{k=0}^{\sigma_1(i)-1} \chi_A \circ M_k\right).$$

Also ist die mittlere Anzahl

$$\frac{1}{E_i\sigma_1(i)} E_i\left(\sum_{k=0}^{\sigma_1(i)-1} \chi_A \circ M_k\right)$$

von Aufenthalten in A relativ zur mittleren Zykluslänge ein natürlicher Kandidat für eine stationäre Verteilung.

Lemma (2.1). *Sei $i \in S$ ein rekurrenter Zustand der diskreten Markovkette M, und*

$$\forall_{A\in\mathcal{S}} \quad \xi^{(i)}(A) := E_i\left(\sum_{k=0}^{\tau(i)-1} \chi_A \circ M_k\right), \text{ bzw.}$$
$$\forall_{A\in\mathcal{S}} \quad \xi_*^{(i)}(A) := \frac{\xi^{(i)}(A)}{\mu_{ii}}.$$

Dann ist $\xi^{(i)}$ ein Maß. Ist i sogar positiv rekurrent, so ist $\xi_*^{(i)}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(S, \mathcal{S})$.

Definition (2.2). Dabei bezeichnet $\tau(i)$ die **Ersteintrittszeit in den Zustand** i, d.h.

$$\tau(i) := \inf\{n \in \mathbf{N}_{\geq 1} \mid M_n = i\}.$$

und $\mu_{ii} := E_i\tau(i)$. Außerdem seien $(\sigma_n(i))_{n\in\mathbf{N}}$ die **sukzessiven Rekurrenzzeiten** in i, d.h.

$$\forall_{n\in\mathbf{N}_{\geq 1}} \quad \sigma_n(i) := \inf\left\{k \in \mathbf{N} \;\middle|\; k > \sigma_{n-1}(i) \text{ und } M_k = i\right\} \text{ und } \sigma_0(i) := 0.$$

Beweis. Sei zunächst i rekurrent, d.h. $P_i\big(\tau(i) < \infty\big) = 1$. Also ist die Summe in der Definition von $\xi^{(i)}$ jeweils P_i-fast überall endlich, und damit ist $\xi^{(i)}$ wohldefiniert. Da S abzählbar ist, ist somit durch $\xi^{(i)}$ ein Maß auf $(S, \mathcal{S})$ definiert.

Ist i sogar positiv rekurrent, so ist $\mu_{ii} = E_i\tau(i) < \infty$ und $E_i\tau(i) > 0$ (da $\tau(i) \geq 1$), d.h. in diesem Fall ist $\xi_*^{(i)}$ wohldefiniert und es folgt

$$\begin{aligned}\xi_*^{(i)}(S) &= \frac{\xi^{(i)}(S)}{\mu_{ii}} = \frac{1}{\mu_{ii}} \cdot E_i\left(\sum_{k=0}^{\tau(i)-1} 1\right) = \frac{E_i\tau(i)}{E_i\tau(i)} \\ &= 1.\end{aligned}$$

□

Satz (2.3). *Ist $i \in S$ ein rekurrenter Zustand der diskreten Markovkette M, so bildet $\xi^{(i)}$ ein stationäres Maß von M.*

Ist der Zustand i sogar positiv rekurrent, so ist $\xi_*^{(i)}$ eine stationäre Verteilung von M.

Definition (2.4). Ist $k \in \mathbf{N}$, so verwenden wir die Notation

$$M^{(k)} := (M_n)_{n \in \mathbf{N}_{\geq k}}.$$

Beweis. Nach dem Lemma genügt es, die erste Aussage zu beweisen: Sei $i \in S$ ein rekurrenter Zustand von M und $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ die kanonoische Filtration von $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Wir zeigen zunächst, daß $\xi^{(i)}$ ein (nichttriviales) σ-endliches Maß ist: Da S abzählbar ist (M ist eine diskrete Markovkette), genügt es dafür zu zeigen, daß jeder Punkt aus S nur endliche Masse trägt. Mit der Definition der Ersteintrittszeit $\tau(i)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\xi^{(i)}(i) &= E_i\left(\chi_{\{i\}} \circ M_0 + \sum_{k=1}^{\tau(i)-1} \chi_{\{i\}} \circ M_k\right) \\ &= E_i(\chi_{\{i\}} \circ M_0 + 0) \\ &= \int \chi_{\{i\}} \circ M_0 \, dP_i \\ &= \int \chi_{\{i\}} \, dP_i^{M_0} \\ &= \int \chi_{\{i\}} \, d\delta_i \\ &= 1.\end{aligned}$$

Insbesondere ist $\xi^{(i)}$ nicht das triviale Maß. Sei nun also $j \in S \setminus \{i\}$. Durch Umordnung folgt

$$\begin{aligned}\xi^{(i)}(j) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P_i\big(\sigma_n(j) < \tau(i) < \sigma_{n+1}(j)\big) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P_i\big(\sigma_n(j) < \tau(i)\big).\end{aligned}$$

Wir schätzen nun die einzelnen Summanden dieser Reihe etwas genauer ab: Sei dazu $n \in \mathbf{N}_{>1}$ und $\ell \in \{i, j\}$. Dann ist wegen $\{\tau(j) < \tau(i)\} \in \mathcal{F}_{\tau(j)}$ (siehe etwa [Alsmeyer, Satz (3.5)])

$$\begin{aligned} P_\ell\big(\sigma_n(j) < \tau(i)\big) &= P_\ell\big(\tau(j) < \tau(i), \sigma_n(j) < \tau(i)\big) \\ &= \int_{\{\tau(j)<\tau(i)\}} \chi_{\{\sigma_n(j)<\tau(j)\}} \, dP_\ell \\ &= \int_{\{\tau(j)<\tau(i)\}} P_\ell\big(\sigma_n(j) < \tau(i) \bigm| \mathcal{F}_{\tau(j)}\big) \, dP_\ell. \end{aligned}$$

Dabei ist (wobei wir in der zweiten Gleichung die starke Markoveigenschaft in der Form [Alsmeyer, (4.12)] verwenden)

$$\begin{aligned} P_\ell\big(\sigma_n(j) < \tau(i) \bigm| \mathcal{F}_{\tau(j)}\big) &= P_\ell\big(M^{(\tau(j)+1)} \text{ trifft } j \text{ mindestens } (n-1)\text{-mal vor } i \bigm| \mathcal{F}_{\tau(j)}\big) \\ &= P_{M_{\tau(j)}}\big(M^{(1)} \text{ trifft } j \text{ mindestens } (n-1)\text{-mal vor } i\big) \\ &= P_{M_{\tau(j)}}\big(\sigma_{n-1}(j) < \tau(i)\big). \end{aligned}$$

Wegen $\delta_j = \delta_{M_{\tau(j)}}$ auf $\{\tau(j) < \infty\}$ und $n > 1$ folgt aus

$$\begin{aligned} P_\ell\big(\sigma_n(j) < \tau(i) \bigm| M_{\tau(j)}\big) &= P_{M_{\tau(j)}}\big(\sigma_{n-1}(j) < \tau(i)\big) \\ &= P_j\big(\sigma_{n-1}(j) < \tau(i)\big) \end{aligned}$$

somit induktiv (da $\tau(j) = \sigma_1(j)$)

$$P_i\big(\sigma_n(j) < \tau(i)\big) = P_i\big(\tau(j) < \tau(i)\big) \cdot P_j\big(\tau(j) < \tau(i)\big)^{n-1}.$$

Andererseits ist $\lim_{n\to\infty} P_i\big(\sigma_n(j) < \tau(i)\big) = 0$, denn: Da i rekurrent ist, ist $P_i\big(\tau(i) < \infty\big) = 1$. Nach Definition von $(\sigma_n(j))_{n\in\mathbf{N}}$ gilt jedoch (P_i-fast überall) $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(j) = \infty$. Mit der Stetigkeit des Maßes folgt daher

$$\lim_{n\to\infty} P_i\big(\sigma_n(j) < \tau(i)\big) = P_i\Bigg(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} \big\{\sigma_n(j) < \tau(i)\big\}\Bigg) = 0,$$

da die Folge $\big(\{\sigma_n(j) < \tau(i)\}\big)_{n\in\mathbf{N}}$ monoton fallend ist.

Also erhalten wir

$$P_j\big(\tau(j) < \tau(i)\big) < 1 \text{ oder } P_i\big(\tau(j) < \tau(i)\big) = 0.$$

Im zweiten Fall folgt daraus sofort $\xi^{(i)}(j) = 0$; im ersten Fall liefert die Ableitung der geometrischen Reihe, daß

$$\begin{aligned} \xi^{(i)}(j) &\le P_i\big(\tau(j) < \tau(i)\big) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P_j\big(\tau(j) < \tau(i)\big)^{n-1} \\ &= P_i\big(\tau(j) < \tau(i)\big) \cdot \frac{1}{\big(1 - P_j\big(\tau(j) < \tau(i)\big)\big)^2}, \end{aligned}$$

was wegen $P_j\big(\tau(j) < \tau(i)\big) < 1$ endlich ist. Also ist $\xi^{(i)}$ ein σ-endliches Maß.

Außerdem ist $\xi^{(i)}$ invariant unter M, denn: Mit der Definition von P_i und der Rekurrenz von i folgt P_i-fast überall

$$M_0 = i = M_{\tau(i)},$$

und damit für alle $j \in S$

$$\begin{aligned}
\xi^{(i)}(j) &= E_i\Bigg(\sum_{k=0}^{\tau(i)-1} \chi_{\{j\}} \circ M_k\Bigg) \\
&= E_i\Bigg(\sum_{k=0}^{\tau(i)-1} \chi_{\{j\}} \circ M_{k+1}\Bigg).
\end{aligned}$$

Der Satz von der monotonen Konvergenz liefert daher

$$\begin{aligned}
\xi^{(i)}(j) &= \sum_{k\in S} E_i\Bigg(\sum_{n=0}^{\tau(i)-1} \chi_{\{M_n=k, M_{n+1}=j\}}\Bigg) \\
&= \sum_{k\in S} E_i\Bigg(\sum_{n\in\mathbf{N}} \chi_{\{\tau(i)>n, M_n=k, M_{n+1}=j\}}\Bigg) \\
&= \sum_{k\in S}\sum_{n\in\mathbf{N}} P_i\big(\tau(i) > n, M_n = k, M_{n+1} = j\big).
\end{aligned}$$

Die einzelnen Summanden können wir mit Hilfe der Markoveigenschaft umschreiben: Sei $k \in S$ und $n \in \mathbf{N}$. Dann ist

$$\big\{\tau(i) > n, M_n = k\big\} = \big\{M_1 \neq 1, \dots, M_n \neq i, M_n = k\big\} \in \mathcal{F}_n.$$

Also erhalten wir mit der Markoveigenschaft

$$\begin{aligned}
P_i\big(\tau(i) > n, M_n = k, M_{n+1} = j\big) &= \int_{\{\tau(i)>n, M_n=k\}} P_i\big(M_{n+1} = j \;\big|\; \mathcal{F}_n\big)\, dP_i \\
&= \int_{\{\tau(i)>n, M_n=k\}} P_i\big(M_{n+1} = j \;\big|\; M_n\big)\, dP_i \\
&= \int_{\{\tau(i)>n, M_n=k\}} p_{M_n,j}\, dP_i \\
&= p_{kj} \cdot P_i\big(\tau(i) > n, M_n = k\big).
\end{aligned}$$

Eingesetzt ergibt dies zusammen mit dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\begin{aligned}\xi^{(i)}(j) &= \sum_{k\in S}\sum_{n\in\mathbf{N}} P_i\big(\tau(i)>n, M_n=k\big)\cdot p_{kj}\\ &= \sum_{k\in S} E_i\Bigg(\sum_{n\in\mathbf{N}} \chi_{\{\tau(i)>n, M_n=k\}}\Bigg)\cdot p_{kj}\\ &= \sum_{k\in S} E_i\Bigg(\sum_{n=0}^{\tau(i)-1} \chi_{\{k\}}\circ M_n\Bigg)\cdot p_{kj}\\ &= \sum_{k\in S} \xi^{(i)}(k)\cdot p_{kj}.\end{aligned}$$

□

Korollar (2.5). *Insbesondere besitzt jede endliche (zeitlich homogene) Markovkette eine stationäre Verteilung.*

Beweis. Nach [Alsmeyer, Satz (9.5)] besitzt jede endliche Markovkette mindestens einen positiv rekurrenten Zustand, woraus mit obigem Satz die Behauptung folgt. □

Korollar (2.6). *In der Situation des Satzes (2.3) gilt außerdem*

$$\xi^{(i)}(S\setminus C_i) = 0,$$

wobei wir mit C_i die Menge der Zustände bezeichnen, die mit i kommunizieren (siehe [Alsmeyer, S. 36]).

Beweis. Sei $j \in S\setminus C_i$. Aus dem Beweis des Satzes folgt, daß es genügt, $P_i\big(\tau(j) < \tau(i)\big) = 0$ zu zeigen: Nach [Alsmeyer, Satz (9.3)] ist C_i abgeschlossen, da i rekurrent ist. Also gilt

$$P_i\big(\tau(j)=\infty\big) = 1.$$

Da i rekurrent ist, ist $P_i\big(\tau(i)<\infty\big) = 1$, woraus nun $P_i\big(\tau(j)<\tau(i)\big) = 0$ folgt. □

3 ■ Stationäre Maße rekurrenter Markovketten ...

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß für rekurrente diskrete Markovketten im wesentlichen nur ein stationäres Maß existiert – insbesondere stimmen damit $\xi^{(i)}$ und $\xi^{(j)}$ für $i,j\in S$ bis auf ein skalares Vielfaches überein.

Desweiteren wird sich herausstellen, daß es in diesem Fall genau dann eine stationäre Verteilung gibt, wenn M sogar positiv rekurrent ist.

Satz (3.1). *Sei M eine rekurrente diskrete Markovkette. Mit obigen Bezeichnungen gelten dann:*

1. *Ist ξ ein stationäres Maß für M, so gilt*
$$\forall_{i\in S} \quad \xi(i) > 0.$$
2. *Die Markovkette besitzt ein (bis auf skalare Vielfache) eindeutig bestimmtes stationäres Maß.*
3. *Dieses stationäre Maß ist genau dann endlich, wenn M positiv rekurrent ist. In diesem Fall bezeichnen wir mit ξ_* die eindeutig bestimmte stationäre Verteilung von M.*
4. *Ist M positiv rekurrent, so gilt*
$$\forall_{i\in S} \quad \xi_*(i) = \frac{1}{\mu_{ii}}.$$

Beweis. 1. Sei ξ ein stationäres Maß für M, d.h. insbesondere existiert ein $i_0 \in S$ mit $\xi(i_0) \neq 0$. Sei nun $i \in S$. Da M irreduzibel ist, sind i_0 und i verbunden, d.h. es gibt ein $n \in \mathbf{N}_{\geq 1}$ mit $(p^n)_{i_0 i} > 0$. Mit der Stationarität von ξ folgt $\xi = \xi \cdot p^n$, und damit
$$\xi(i) = \sum_{j\in S} \xi(j) \cdot (p^n)_{ji} \geq \xi(i_0) \cdot (p^n)_{i_0 i} > 0.$$

2. Da M rekurrent ist, besitzt M nach Satz (2.3) ein stationäres Maß. Es bleibt also nur die Eindeutigkeitsaussage zu zeigen:

Sei ξ ein stationäres Maß für M und $i \in S$. Nach dem ersten Teil können wir ohne Beschränkung $\xi(i) = 1$ annehmen (ansonsten ist $\xi/\xi(i)$ ein Maß mit den gewünschten Eigenschaften).

Lemma (3.2). *In dieser Situation ist bereits $\xi - \xi^{(i)} \geq 0$.*

Beweis. Wir betrachten die Matrix q, die aus der Übergangsmatrix p entsteht, indem wir in der i-ten Spalte alle Komponenten durch Null ersetzen.

Dann ist $\xi = \delta_i + \xi \cdot q$, denn: Da ξ invariant ist, ist
$$\forall_{j\in S\setminus\{i\}} \quad \xi(j) = (\xi \cdot p)_j = \sum_{k\in S} \xi(k) \cdot p_{kj},$$
und damit – da $\xi(i) = 1$ ist –
$$\begin{aligned}\forall_{j\in S} \quad \xi(j) &= \delta_{ij} + \sum_{k\in S} \xi(k) q_{kj} \\ &= \delta_{ij} + (\xi \cdot q)_j.\end{aligned}$$

(A) *Behauptung.* Es gilt
$$\xi \geq \sum_{n\in\mathbf{N}} (q^n)_{i,*}.$$

Beweis. Es genügt natürlich zu zeigen, daß für jedes $n \in \mathbf{N}$

$$\xi \geq \sum_{k=0}^{n} (q^k)_{i,*}$$

ist. Mit dem oben gezeigten folgt induktiv

$$\begin{aligned}\forall_{n\in\mathbf{N}} \quad \xi &= \delta_i + \big(\delta_i + (\ldots)\cdot q\big)\cdot q = \sum_{k=0}^{n} \delta_i q^k + \xi q^{n+1} \\ &\geq \sum_{k=0}^{n} \delta_i q^k = \sum_{k=0}^{n} (q^k)_{i,*}.\end{aligned}$$

□

(B) *Behauptung.* Umgekehrt gilt

$$\forall_{j\in S\setminus\{j\}} \quad \xi^{(i)}(j) = \sum_{n\in\mathbf{N}} (q^n)_{ij}.$$

Beweis. Sei $j \in S \setminus \{j\}$. Wegen

$$\begin{aligned}\forall_{n\in\mathbf{N}} \quad (q^n)_{ij} &= \sum_{j_1\in S\setminus\{i\}} \cdots \sum_{j_{n-1}\in\setminus\{i\}} p_{ij_1}p_{j_1j_2}\ldots p_{j_{n-1}j} \\ &= P_i(M_1 \neq i,\ldots,M_{n-1}\neq i, M_n = j) \\ &= P_i\big(M_n = j, \tau(i) > n\big)\end{aligned}$$

erhalten wir (mit dem Satz von der monotonen Konvergenz)

$$\begin{aligned}\xi^{(i)}(j) &= E_i\Bigg(\sum_{n=0}^{\tau(i)-1} \chi_{\{M_n=j\}}\Bigg) \\ &= \sum_{m\in\mathbf{N}_{\geq 1}} \sum_{n=0}^{m-1} P_i\big(M_n = j, \tau(i) = m\big) \\ &= \sum_{n\in\mathbf{N}} \sum_{m\in\mathbf{N}_{\geq n}} P_i\big(M_n = j, \tau(i) = m\big) \\ &= \sum_{n\in\mathbf{N}} P_i\big(M_n = j, \tau(i) > n\big) \\ &= \sum_{n\in\mathbf{N}} (q^n)_{ij}.\end{aligned}$$

□

Nach dem Beweis von Satz (2.3) ist $\xi^{(i)}(i) = 1 = \xi(i)$. Mit (A) und (B) haben wir somit das Lemma gezeigt. □

Also ist nach dem Lemma auch
$$\rho := \xi - \xi^{(i)}$$
ein σ-endliches Maß auf S. *Angenommen,* $\rho \neq 0$. Dann ist ρ wegen $\rho \cdot p = \rho$ ein stationäres Maß für M. Allerdings ist

$$\rho(i) = \xi(i) - \xi^{(i)}(i) = 1 - 1 = 0,$$

im Widerspruch zum ersten Teil des Satzes. Also ist $\rho = 0$, was die Eindeutigkeit (bis auf skalare Vielfache) beweist.

3. Sei ξ ein stationäres Maß für M, d.h. nach 1. und 2. gibt es zu jedem $i \in S$ eine Konstante $c_i \in \mathbf{R}_{>0}$ mit
$$\xi = c_i \cdot \xi^{(i)}.$$
Also ist ξ genau dann endlich, wenn $\mu_{ii} = \xi^{(i)}(S) < \infty$ ist. Dies bedeutet aber gerade, daß i bzw. M positiv rekurrent ist.

4. Ist M positiv rekurrent, so folgt mit dem bisher gezeigten für alle $i \in S$

$$\xi_*(i) = \frac{\xi^{(i)}(i)}{\xi^{(i)}(S)} = \frac{1}{\mu_{ii}}. \qquad \square$$

Korollar (3.3). *Jede irreduzible endliche (zeitlich homogene) Markovkette M ist positiv rekurrent und besitzt daher eine (eindeutig bestimmte) stationäre Verteilung.*

Beweis. Nach [Alsmeyer, Satz (9.5)] besitzt jede endliche Markovkette einen rekurrenten Zustand. Da M irreduzibel ist, ist M somit rekurrent, besitzt also nach dem zweiten Teil des obigen Satzes ein stationäres Maß ξ. Da der Zustandsraum von M endlich und ξ ein σ-endliches Maß ist, ist ξ sogar ein endliches Maß.

Nach dem dritten Teil des obigen Satzes ist M daher bereits positiv rekurrent. $\square$

Korollar (3.4). *Jeder rekurrente Zustand einer endlichen (zeitlich homogenen) Markovkette ist bereits positiv rekurrent.*

Beweis. Sei M eine endliche Markovkette und i ein rekurrenter Zustand. Nach [Alsmeyer, S. 55] ist die zugehörige Klasse C_i abgeschlossen. Also können wir M unter P_i als Markovkette mit Zustandsraum C_i auffassen. Da C_i natürlich endlich ist, ist dies eine endliche irreduzible Markovkette.

Aus dem vorherigen Korollar erhalten wir nun, daß i bereits positiv rekurrent ist. $\square$

4 ■ . . . sind Zeitmittel

Zu Beginn hatten wir festgestellt, daß jedes Zeitmittel ein stationäres Maß ist. Für (positiv) rekurrente Ketten gilt auch die Umkehrung. Da wir bereits gezeigt haben, daß jede positiv rekurrente diskrete Markovkette eine stationäre Verteilung besitzt, folgt also in diesem Fall auch Konvergenz im Zeitmittel.

Satz (4.1). *Sei ξ ein stationäres Maß der rekurrenten Markovkette M (ein solches existiert nach Satz (2.3)), sowie $\xi_* := \xi/\xi(S)$. Außerdem sei*

$$\mathcal{S}_\xi := \{A \in \mathcal{S} \mid \xi(A) < \infty\}.$$

1. *Dann gilt für jede Anfangsverteilung $\lambda \in W$*

$$\forall_{A\in\mathcal{S}_\xi} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \delta_{M_k}(A) \underset{P_\lambda}{=} \xi_*(A),$$

   d.h. die empirischen Verteilungen $\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\delta_{M_k}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergieren auf $\mathcal{S}_\xi$ punktweise P_λ-fast überall gegen ξ_*.

2. *Außerdem gelten die entsprechenden $\mathcal{L}^1$-Aussagen, nämlich: für alle $\lambda \in W$ ist*

$$\forall_{A\in\mathcal{S}_\xi} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} P_\lambda^{M_k}(A) = \xi_*(A),$$

   und im positiv rekurrenten Fall gilt sogar (Konvergenz in Totalvariation)

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} P_\lambda^{M_k} - \xi_* \right\| = 0.$$

Für den Beweis des Satzes benötigen wir ein paar Hilfsmittel:

Lemma (4.2). *Sei $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge quasiintegrabler stochastisch unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen vom Typ $(\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\bar{\mathbf{R}}_{\geq 0}, \bar{\mathbf{B}})$ mit positivem Erwartungswert μ und*

$$\forall_{n\in\mathbf{N}} \quad P(X_n < \infty) = 1.$$

Außerdem sei $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definiert durch

$$\forall_{n\in\mathbf{N}} \quad S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1. *Sei für jedes $m \in \mathbf{N}$ eine P-fast überall endliche Funktion $f_m\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ gegeben, so daß $\lim_{m\to\infty} f_m \underset{P}{=} \infty$. Dann ist*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{S_{f_m}}{f_m} \underset{P}{=} \mu.$$

2. *Die* **Erstaustrittszeiten** *$(T_m)_{m\in\mathbf{N}}$ mit*

$$\forall_{m\in\mathbf{N}} \quad T_m := \inf\{n \in \mathbf{N} \mid S_n > m\}$$

   erfüllen die Voraussetzungen von 1. Insbesondere gilt also

$$\lim_{m\to\infty} \frac{S_{T_m}}{T_m} \underset{P}{=} \mu.$$

3. *Außerdem ist*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{T_m}{m} \underset{P}{=} \frac{1}{\mu}.$$

Beweis. (des Lemmas). Da die $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ fast überall endlich sind, können wir ohne Einschränkung annehmen, daß sie vom Typ $(\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbf{R}_{\geq 0}, \mathbf{B})$ sind.

1. Nach dem zweiten starken Gesetz der großen Zahlen (bzw. [Schmitz, S. 181], falls $\mu = \infty$) gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \underset{P}{=} \mu.$$

Also existiert eine P-Nullmenge $N \subset \Omega$, so daß für alle $x \in \Omega \setminus N$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{S_n(x)}{n} &= \mu, \\ \forall_{m\in\mathbf{N}} \quad f_m(x) &< \infty, \text{ und} \\ \lim_{m\to\infty} f_m(x) &= \infty, \end{aligned}$$

und damit

$$\forall_{x\in\Omega\setminus N} \quad \lim_{m\to\infty} \frac{S_{f_m(x)}(x)}{f_m(x)} = \mu.$$

2. Nach dem zweiten starken Gesetz der großen Zahlen (bzw. [Schmitz, S. 181], falls $\mu = \infty$) gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \underset{P}{=} \mu > 0$, und damit

$$\lim_{n\to\infty} S_n \underset{P}{=} \infty.$$

Also ist für alle $m \in \mathbf{N}$ bereits P-fast überall $T_m < \infty$ und (nach Konstruktion)

$$\lim_{m\to\infty} T_m \underset{P}{=} \infty.$$

3. Sei nun $m \in \mathbf{N}$. Nach Konstruktion ist ferner $S_{T_m-1} \leq m < S_{T_m}$, und damit (jeweils P-fast überall)

$$\begin{aligned} \limsup_{m\to\infty} \frac{m}{T_m} &\leq \lim_{m\to\infty} \frac{S_{T_m}}{T_m} = \mu, \\ \liminf_{m\to\infty} \frac{m}{T_m} &\geq \lim_{m\to\infty} \frac{S_{T_m-1}}{T_m} = \mu. \end{aligned}$$

Insgesamt liefert das

$$\lim_{m\to\infty} \frac{T_m}{m} \underset{P}{=} \frac{1}{\mu}.$$

□

Beweis. (des Satzes). 1. Sei $i \in S$ und $(\sigma_n(i))_{n\in\mathbf{N}}$ die Folge der sukzessiven Rekurrenzzeiten in diesem Zustand (mit $\sigma_0 := 0$). Sei außerdem $\lambda \in W$. Wir zeigen zunächst einige Eigenschaften für P_λ:

(A) *Behauptung.* Es ist
$$P_\lambda\big(\tau(i) < \infty\big) = 1.$$

Beweis. Da M rekurrent ist, ist nach [Alsmeyer, Satz (9.3)] für jeden Zustand $j \in S$
$$P_j\big(\tau(i) < \infty\big) = 1.$$
Wegen $P_\lambda^M = \sum_{j\in S} \lambda(j) P_j^M$ folgt also
$$\begin{aligned} P_\lambda\big(\tau(i) < \infty\big) &= \sum_{j\in S} \lambda(j) P_j\big(\tau(i) < \infty\big) \\ &= \sum_{j\in S} \lambda(j) = 1. \end{aligned}$$
□

(B) *Behauptung.* Unter P_λ sind die Zyklen $(Z_k)_{k\in\mathbf{N}\geq 1}$ mit
$$\begin{aligned} \forall_{k\in\mathbf{N}} \quad Z_k &:= (\tau_{k+1}(i), M_{\sigma_k(i)}, \dots, M_{\sigma_{k+1}(i)-1}), \\ \tau_{k+1}(i) &:= \sigma_{k+1}(i) - \sigma_k(i) \end{aligned}$$
stochastisch unabhängig und identisch verteilt mit
$$P_\lambda^{Z_1} = P_i^{Z_0}.$$

Beweis. Dies folgt mit (A) direkt aus [Alsmeyer, Satz (7.14)]. □

Insbesondere ist $(\sigma_n'(i))_{n\in\mathbf{N}} := (\sigma_{n+1}(i) - \sigma_1(i))_{n\in\mathbf{N}}$ wegen
$$\forall_{n\in\mathbf{N}} \quad \sigma_n'(i) = \sum_{k=2}^{n+1} \tau_k(i)$$
unter P_λ ein Random Walk (d.h. eine Summe stochastisch unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen).

Sei $A \in \mathcal{S}_\xi$, oBdA $A \neq \emptyset$ (sonst ist die Behauptung klar). Wir definieren nun für alle $n \in \mathbf{N}$
$$\begin{aligned} N_n(A) &:= \sum_{k=1}^{n} f_A \circ Z_k, \\ \forall_{s_0,\dots,s_{n-1}\in S} \quad f_A(n, s_0, \dots, s_{n-1}) &:= \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(s_k), \\ T_n &:= \inf\big\{k \in \mathbf{N} \,\big|\, \sigma_k'(i) > n\big\}. \end{aligned}$$

Wegen (A) und
$$E_\lambda \tau_2(i) = E_i \tau_1(i) = E_i \tau(i) = \mu_{ii} > 0$$

erhalten wir aus dem dritten Teil des Lemmas – angewendet auf den Random Walk $(\sigma'_n(i))_{n\in\mathbf{N}}$ –, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} \underset{P_\lambda}{=} \frac{1}{E_\lambda \tau_2(i)} = \frac{1}{\mu_{ii}}.$$

Auch die Folge $(N_n(A))_{n\in\mathbf{N}}$ ist ein Random Walk, denn mit den $(Z_k)_{k\in\mathbf{N}_{\geq 1}}$ sind auch die $(f_A \circ Z_k)_{k\in\mathbf{N}_{\geq 1}}$ unter P_λ stochastisch unabhängig und identisch verteilt.

Wegen $A \neq \emptyset$ ist dabei nach dem ersten Teil von Satz (3.1)

$$\begin{aligned} E_\lambda(f_A \circ Z_1) &= E_i(f_A \circ Z_0) \\ &= E_i\Bigg(\sum_{k=0}^{\tau(i)-1} \chi_A \circ M_k\Bigg) \\ &= \xi^{(i)}(A) > 0, \end{aligned}$$

und aus (A) folgt $f_A \circ Z_1 < \tau_2(i) - 1 \underset{P_\lambda}{<} \infty$. Also gilt nach dem zweiten (angewendet auf $(\sigma'_n(i))_{n\in\mathbf{N}}$) bzw. ersten Teil (angewendet auf $(N_n(A))_{n\in\mathbf{N}}$) des Lemmas

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_{T_n}(A)}{T_n} \underset{P_\lambda}{=} E_\lambda(f_A \circ Z_1) = \xi^{(i)}(A).$$

Sei $n \in \mathbf{N}$. Nach Konstruktion ist

$$\begin{aligned} N_n(A) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{\tau_{k+1}(i)-1} \chi_A \circ M_{\sigma_k(i)+j} = \sum_{k=\tau_1(i)}^{\sigma_n(i)-1} \chi_A \circ M_k \\ &= \sum_{j=0}^{\sigma'_n(i)-1} \chi_A \circ M_{\tau_1(i)+j}, \end{aligned}$$

und damit

$$N_{T_n - 1}(A) \leq \sum_{k=0}^{n} \chi_A \circ M_{\tau(i)+k} \leq N_{T_n}(A).$$

Also bekommen wir auf der Menge $\{T_n \neq 1\}$

$$\frac{N_{T_n-1}(A)}{T_n - 1} \cdot \frac{T_n - 1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \chi_A \circ M_{\tau(i)+k} \leq \frac{N_{T_n}(A)}{T_n} \cdot \frac{T_n}{n+1}.$$

Der zweite Teil des Lemmas zeigt $\lim_{n\to\infty} T_n \underset{P_\lambda}{=} \infty$. Insbesondere liefert dies

$$P_\lambda\big(\liminf_{n\to\infty} \{T_n \neq 1\}\big) = 1.$$

Daher folgt mit dem bisher gezeigten P_λ-fast überall

$$\begin{aligned}\frac{\xi^{(i)}(A)}{\mu_{ii}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{N_{T_n}(A)}{T_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{N_{T_n}(A)}{T_n} \cdot \frac{T_n}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \chi_A \circ M_{\tau(i)+k}.\end{aligned}$$

Wegen $P_\lambda\big(\tau(i) < \infty\big) = 1$ und $\chi_A \circ M_K \leq 1$ erhalten wir daraus aber auch P_λ-fast überall

$$\begin{aligned}\frac{\xi^{(i)}(A)}{\mu_{ii}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \chi_A \circ M_k \\ &\quad - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{\tau(i)-1} \chi_A \circ M_k + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{n+\tau(i)} \chi_A \circ M_k \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \chi_A \circ M_k + 0 \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \delta_{M_k}(A).\end{aligned}$$

Aus (3.1)(2.) folgt $\frac{\xi^{(i)}(A)}{\mu_{ii}} = \frac{\xi^{(i)}(A)}{\xi^{(i)}(S)} = \xi_*(A)$, womit 1. bewiesen ist.

2. Sei $A \in \mathcal{S}_\xi$ und $\lambda \in W$. Dann ist für alle $n \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} P_\lambda^{M_k}(A) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} E_\lambda(\chi_A \circ M_k) \\ &= E_\lambda\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \chi_A \circ M_k\right) \\ &= E_\lambda\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \delta_{M_k}(A)\right).\end{aligned}$$

Also liefern der erste Teil und der Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\begin{aligned}\xi_*(A) &= E_\lambda\big(\xi_*(A)\big) \\ &= E_\lambda\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \delta_{M_k}(A)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} E_\lambda\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \delta_{M_k}(A)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} P_\lambda^{M_k}(A).\end{aligned}$$

Ist M sogar positiv rekurrent, so ist (nach (3.1)(3.)) $\mathcal{S}_\xi = \mathcal{S}$, d.h. die Wahrscheinlichkeitsmaße $\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} P_\lambda^{M_k}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergieren punktweise gegen ξ_*.

Das Lemma von Scheffé (siehe etwa [Schmitz, Lemma (7.3)]) liefert somit die gleichmäßige Konvergenz. $\square$

Dieser Satz liefert ein Kriterium für die Null-Rekurrenz von Zuständen:

Definition (4.3). Sei $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{R}$ eine Folge. Dann schreiben wir

$$\widetilde{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k$$

für den Césaro-Limes dieser Folge.

Korollar (4.4). *Sei M eine diskrete Markovkette und $i \in S$. Der Zustand i ist genau dann null-rekurrent, wenn*

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} (p^n)_{ii} = \infty \ \textit{und}\ \widetilde{\lim_{n\to\infty}}\, (p^n)_{ii} = 0$$

gilt. In diesem Fall ist sogar

$$\forall_{j\in S} \quad \widetilde{\lim_{n\to\infty}}\, (p^n)_{ji} = 0.$$

Beweis. Nach [Alsmeyer, Satz (7.18)] ist i genau dann rekurrent, wenn $\sum_{n\in\mathbf{N}}(p^n)_{ii} = \infty$ ist. Wir können also ohne Einschränkung annehmen, daß i rekurrent ist.

Nach [Alsmeyer, S. 55] ist die zugehörige Klasse C_i abgeschlossen. Also können wir M unter P_i als rekurrente diskrete Markovkette mit Zustandsraum C_i ansehen.

Aus Satz (4.1)(2.) folgt somit für das Maß ξ_* der eingeschränkten Markovkette, daß

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_{ii}} = \xi_*(i) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} P_i^{M_k}(i) \\ &= \widetilde{\lim_{n\to\infty}}\, (p^n)_{ii}.\end{aligned}$$

Definitionsgemäß ist μ_{ii} genau dann unendlich, wenn i null-rekurrent ist. Es bleibt also nur noch die Zusatzaussage zu beweisen – für den Fall, daß i null-rekurrent ist: Nach [Alsmeyer, (4.13)] ist

$$\forall_{j\in S} \quad \widetilde{\lim_{n\to\infty}}\, (p^n)_{ji} = \widetilde{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} f_{ji}^{(k)} \cdot (p^{n-k})_{ii},$$

wobei wir $f_{ji}^{(k)} := P_j\big(\tau(i) = n\big)$ schreiben. Für alle $j \in S$ und alle $n \in \mathbf{N}$ ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=1}^{k} f_{ji}^{(\ell)}(p^{k-\ell})_{ii} &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{k} f_{ji}^{(\ell)}(p^{k-\ell})_{ii} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=\ell}^{n} f_{ji}^{(\ell)}(p^{k-\ell})_{ii} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{\ell=1}^{n} f_{ji}^{(\ell)}\sum_{k=0}^{n-\ell}(p^{k})_{ii} \\
&\leq \sum_{\ell\in\mathbf{N}_{\geq 1}} f_{ji}^{(\ell)} \cdot \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(p^{k})_{ii} \\
&\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(p^{k})_{ii},
\end{aligned}$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty}(p^n)_{ji} = \lim_{n\to\infty}(p^n)_{ii} = 0. \qquad \square$$

Korollar (4.5). *Sei M eine diskrete Markovkette, die eine stationäre Verteilung ξ_* besitzt. Dann ist $S = N \cup R$, wobei N die Menge der transienten oder null-rekurrenten und R die Menge der positiv rekurrenten Zustände sei. Dabei ist $R \neq \emptyset$ und*

$$\forall_{i\in N} \quad \xi_*(i) = 0.$$

Beweis. Da jeder Zustand aus S transient, null-rekurrent oder positiv rekurrent ist, folgt die Zerlegung $S = N \cup R$. Sei nun oBdA $N \neq \emptyset$ und $i \in N$.

Ist i null-rekurrent, so ist nach dem letzten Korollar

$$\forall_{j\in S} \quad \lim_{n\to\infty}(p^n)_{ji} = 0.$$

Ist i transient, so ist $\sum_{n\in\mathbf{N}}(p^n)_{ji} < \infty$ für alle $j \in S$ nach [Alsmeyer, Satz (7.18)]. Also gilt auch in diesem Fall (da jede Nullfolge eine Césaro-Nullfolge ist), daß

$$\forall_{j\in S} \quad \lim_{n\to\infty}(p^n)_{ji} = 0.$$

Da ξ_* stationär ist, folgt insbesondere

$$\forall_{n\in\mathbf{N}} \quad \xi_*(i) = \sum_{j\in S}\xi_*(j)(p^n)_{ji},$$

und damit auch

$$\xi_*(i) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j\in S}\xi_*(j)(p^n)_{ji}.$$

Der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert nun

$$\xi_*(i) = \sum_{j \in S} \xi_*(j) \cdot \lim_{n \to \infty} (p^n)_{ji} = 0,$$

d.h. $\xi_*(N) = 0$. Andererseits ist $\sum_{i \in S} \xi_*(i) = 1$, und somit $R \neq \emptyset$. $\square$

5 ■ Wieviele stationäre Maße besitzt eine diskrete Markovkette?

Zerfällt der Zustandsraum einer diskreten Markovkette in (mindestens zwei) Rekurrenzklassen, so erhalten wir durch Linearkombination der stationären Maße aus Satz (2.3) auf den einzelnen Rekurrenzklassen mehrere stationäre Maße für M, die sich nicht nur durch ein skalares Vielfaches unterscheiden.

Es kann außerdem durchaus vorkommen, daß eine diskrete Markovkette überhaupt kein stationäres Maß besitzt – nämlich im transienten Fall. In diesem Fall sind keine allgemeinen Aussagen über die Anzahl der stationären Maße möglich:

Beispiel. (Irrfahrten auf $\mathbf{Z}$). Sei $M = (M_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine Irrfahrt auf $\mathbf{Z}$ mit Parameter $q \in (0,1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$, d.h. für alle $n \in \mathbf{N}$ ist

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

wobei die $(X_k)_{k \in \mathbf{N}}$ für jedes $i \in \mathbf{Z}$ unter P_i stochastisch unabhängig sind mit

$$\begin{aligned} P_i(X_1 = 1) &= q, \\ P_i(X_1 = -1) &= 1 - q. \end{aligned}$$

Diese diskrete Markovkette besitzt mehrere linear unabhängige stationäre Maße, denn: Sei $\xi \neq 0$ ein σ-endliches Maß auf $\mathbf{Z}$. Also ist ξ genau dann ein stationäres Maß für M, wenn die Eigenwertbedingung

$$\forall_{j \in \mathbf{Z}} \quad \xi(j) = q \cdot \xi(j-1) + (1-q) \cdot \xi(j+1)$$

gilt. Wegen $q \neq \frac{1}{2}$ (d.h. M ist nicht rekurrent – siehe [Alsmeyer]) sind das Zählmaß und das durch

$$j \longmapsto \left(\frac{q}{1-q} \right)^j$$

gegebene Maß auf $\mathbf{Z}$ zwei linear unabhängige Lösungen dieses Gleichungssystems. Also besitzt M zwei linear unabhängige stationäre Maße. ■

Beispiel. (Strähnenkette). Sei $M = (M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine diskrete Markovkette mit Zustandsraum $\mathbf{N}$ und Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} q_0 & p_0 & 0 & \cdots & & & \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & \cdots & & \\ q_2 & 0 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & \ddots & \end{pmatrix}$$

wobei $(p_j)_{j\in\mathbf{N}} \subset (0,1)$ und $q_j = 1-p_j$ für alle $j \in \mathbf{N}$. Anschaulich ist klar, daß diese Markovkette genau dann transient ist, wenn die $(p_j)_{j\in\mathbf{N}}$ schnell genug gegen 1 konvergieren. Es gelte nun

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-p_j) < \infty,$$

d.h. das unendliche Produkt $\prod_{n\in\mathbf{N}} p_j$ konvergiert und ist ungleich Null. *Angenommen,* es existiert ein stationäres Maß ξ für M. Dann folgt

$$\begin{aligned} \xi(0) &= \sum_{n\in\mathbf{N}} q_n \cdot \xi(n), \text{ und} \\ \forall_{j\in\mathbf{N}_{\geq 1}} \quad \xi(j) &= p_{j-1}\cdot\xi(j-1). \end{aligned}$$

Also ist

$$\forall_{j\in\mathbf{N}} \quad \xi(j) = \xi(0)\cdot\prod_{k=0}^{j-1} p_k.$$

Ist $\xi(0) = 0$, so liefert dies bereits $\xi = 0$. Da wir jedoch angenommen haben, daß ξ stationär ist, ist somit $\xi(0) \neq 0$. Wir erhalten daher aus

$$\xi(0) = \sum_{n\in\mathbf{N}} q_n\xi(n) = \xi(0)\cdot\sum_{n\in\mathbf{N}} q_n \prod_{j=0}^{n-1} p_j,$$

daß

$$\begin{aligned} 1 = \sum_{n\in\mathbf{N}} q_n \prod_{j=0}^{n-1} p_j &= \sum_{n\in\mathbf{N}}\Big(\prod_{j=0}^{n-1} p_j - \prod_{j=0}^{n} p_j\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty}\Big(1-\prod_{j=0}^{n} p_j\Big) \\ &= 1 - \prod_{n\in\mathbf{N}} p_n, \end{aligned}$$

im Widerspruch zu $\prod_{n\in\mathbf{N}} p_n \neq 0$. Also kann M kein stationäres Maß besitzen. ■

Außerdem gibt es – wie im rekurrenten Fall – diskrete transiente Markovketten, die bis auf skalare Vielfache genau ein stationäres Maß besitzen (siehe etwa [Alsmeyer, Beispiel (10.16)]).

Symbolverzeichnis

$\mathbf{N}$	Die natürlichen Zahlen enthalten die Null.
$(\mathbf{R}, \mathbf{B})$	ist der Maßraum $\mathbf{R}$ mit der Borelschen σ-Algebra $\mathbf{B}$.
$(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{B}})$	schließt auch die Punkte $-\infty$ und ∞ mit ein.
$(S, \mathcal{S})$	Mit $(S, \mathcal{S})$ bezeichnen wir den Zustandsraum unserer Markovkette $M = (M_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
W	ist die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(S, \mathcal{S})$.
$\mathbf{P}$	ist der Übergangskern von M,
$p = (p_{ij})_{i,j\in S}$	die Übergangsmatrix.
P_λ	Ist $\lambda \in W$, so ist P_λ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $$P_\lambda^M = \lambda \otimes \mathbf{P}^\infty.$$
E_λ	steht für alle $\lambda \in W$ für den Erwartungswert unter P_λ.
P_i	Ist $i \in S$, so ist P_i eine Abkürzung für P_{δ_i}. Da wir jeweils den Typ der Indices angeben, sollte keine Verwirrung mit den vorherigen Bezeichnern entstehen.
E_i	Ist $i \in S$, so ist E_i der Erwartungswert unter P_i.
μ_{ii}	Außerdem schreiben wir $$\mu_{ii} := E_i\tau(i).$$
$\otimes$	Für Maße bezeichnet dies das Produktmaß und für σ-Algebren die Produkt-σ-Algebra. Sind K_1 und K_2 Kerne von $(\Omega_0, \mathcal{S}_0)$ nach $(\Omega_1, \mathcal{S}_1)$ bzw. von $(\Omega_1, \mathcal{S}_1)$ nach $(\Omega_2, \mathcal{S}_2)$, so definieren wir den Kern $K_1 \otimes K_2$ von $(\Omega_0, \mathcal{S}_0)$ nach $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2)$ via $$\forall_{\omega_0\in\Omega_0} \quad \forall_{A_1\in\mathcal{S}_1} \quad \forall_{A_2\in\mathcal{S}_2} \quad K_1 \otimes K_2(\omega_0, A_1 \times A_2) := \int_{A_1} K_2(\omega_1, A_2)\, dK_1(\omega_0, \,\cdot\,)(\omega_1).$$
$\circ$	Für gewöhnliche Abbildungen steht dies natürlich für die Komposition. Sind K_1 und K_2 Kerne von $(\Omega_0, \mathcal{S}_0)$ nach $(\Omega_1, \mathcal{S}_1)$ bzw. von $(\Omega_1, \mathcal{S}_1)$ nach $(\Omega_2, \mathcal{S}_2)$, so definieren wir den Kern $K_1 \circ K_2$ von $(\Omega_0, \mathcal{S}_0)$ nach $(\Omega_2, \mathcal{S}_2)$ via $$\forall_{\omega_0\in\Omega_0} \quad \forall_{A_2\in\mathcal{S}_2} \quad K_1 \circ K_2(\omega_0, A_2) := K_1 \otimes K_2(\omega_0, \Omega_1 \times A_2).$$
$\tau(i)$	Ist $i \in S$, so ist $\tau(i)$ die Ersteintrittszeit in den Zustand i.
$(\sigma_n(i))_{n\in\mathbf{N}}$	Für $i \in S$ sind dies die sukzessiven Rückkehrzeiten in den Zustand i.

$\mathcal{F}_\tau$ Ist $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine Filtration auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und τ eine $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbf{N}}$-Stopzeit, so ist

$$\mathcal{F}_\tau := \left\{ A \in \mathcal{A} \,\middle|\, \forall_{n\in\mathbf{N}\cup\{\infty\}} \quad A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n \right\}$$

die **σ-Algebra der τ-Vergangenheit**, wobei

$$\mathcal{F}_\infty := \sigma\Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathcal{F}_n\Big).$$

$\underset{P}{=}$ Ist P ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so steht $\underset{P}{=}$ für Gleichheit P-fast überall (analog für $\underset{P}{<}$).

$\widetilde{\lim}$ Ist $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{R}$, so bezeichnen wir mit

$$\widetilde{\lim_{n\to\infty}} a_n := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_n$$

den Césaro-Limeks dieser Folge.

$\xi^{(i)}$ Dieses Maß wurde in Lemma (2.1) definiert.

$\xi_*^{(i)}$ dito.

Literatur

[Alsmeyer] Gerold Alsmeyer, *Stochastische Prozesse, Teil I.* Skripten zur mathematischen Statistik, Universität Münster, 2002 (zweite erweiterte Auflage).

[Schmitz] Norbert Schmitz, *Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitstheorie.* Teubner Verlag, Stuttgart, 1996.

We demand rigidly defined areas of doubt and uncertainty.
– Douglas Adams