Die Quinte und der Wolf – über die Symmetrie der gleichstufigen Stimmung

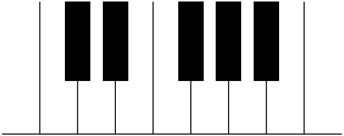
Goethe-Gymnasium. 07/2014. Regensburg

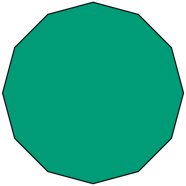
Clara Löh

Fakultät für Mathematik. Universität Regensburg


$\frac{262144}{177147}$

Überblick





Die Quinte und ~~der Wolf~~ die Oktave

Die gleichstufige Stimmung

Symmetrie der gleichstufigen Stimmung

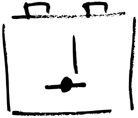
Überblick

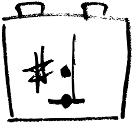
Die Quinte und ~~der Wolf~~ die Oktave

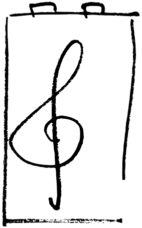
Die gleichstufige Stimmung

Symmetrie der gleichstufigen Stimmung

Bausteine der Musik

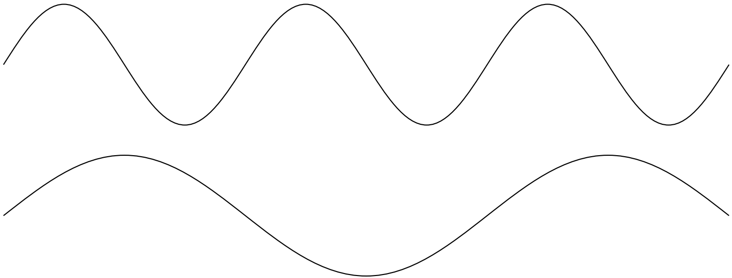






- Töne
- Intervalle
  - Zwischenraum zwischen zwei Tönen
- Tonsystem
  - Welche Töne sind verfügbar bzw. notierbar?
  - Welche Intervalle liegen dazwischen?

Töne



- Töne haben viele Parameter: Tonhöhe, Lautstärke, ...
- Wir beschränken uns auf die Tonhöhe: diese wird durch die Frequenz (Schwingungen pro Sekunde, Maßeinheit Hz) bestimmt.
- Beispiel: Kammerton a': 440 Hz
  (je nach Orchester auch 443 Hz oder 442 Hz)
- Hörbarer Bereich: ca. 15–20000 Hz

Intervalle

- Intervall:
  - Zwischenraum zwischen zwei Tönen
  - Wird durch das Frequenzverhältnis der Töne beschrieben
- Konsonanz: Je besser sich das Frequenzverhältnis zweier Töne durch einen Bruch kleiner natürlicher Zahlen angeben lässt, desto konsonanter empfinden wir das Intervall.

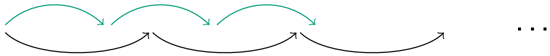
Name	Frequenzverhältnis
Prime	1 : 1
große Sekunde	9 : 8
kleine Terz	6 : 5
große Terz	5 : 4
Quarte	4 : 3
Quinte	3 : 2
Oktave	2 : 1

- Beispiel: Eine Oktave höher als a′ (440 Hz) ist 880 Hz.
- Beispiel: Quinte $\circ$ Quarte $=$ Oktave, denn $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2$.

Aufbau eines Tonsystems

Tonsystem:

- Welche Töne sind verfügbar bzw. notierbar?
- Welche Intervalle liegen dazwischen?



Frage

- Für welche natürlichen Zahlen m und n sind m Quinten genau n Oktaven?
- D.h.: Für welche natürlichen Zahlen m und n gilt $\left(\frac{3}{2}\right)^m = 2^n$?
- D.h.: Für welche natürlichen Zahlen m und n gilt $3^m = 2^{n+m}$?

Antwort

Aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung ist dies nur für $m = 0 = n$ möglich!

Wie kann man Quinten ungefähr in Oktaven umrechnen?

Frage

- Für welche m und n sind m Quinten ungefähr n Oktaven?
- D.h.: Für welche natürlichen Zahlen m und n gilt $\left(\frac{3}{2}\right)^m \approx 2^n$?

Anzahl Quinten	Frequenzverhältnis	
1	$\frac{3}{2}$	≈ 1.50
2	$\left(\frac{3}{2}\right)^2$	≈ 2.25
3	$\left(\frac{3}{2}\right)^3$	≈ 3.38
4	$\left(\frac{3}{2}\right)^4$	≈ 5.06
$\vdots$		
12	$\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$	≈ 129.75 nahe an $2^7 = 128$
		$\approx 128 \cdot 1.01$

Antwort

Zwölf Quinten sind ungefähr sieben Oktaven.

Der Wolf!

- Sieben Oktaven sind ungefähr zwölf Quinten.
- Sieben Oktaven sind daher
  - elf Quinten und
  - eine ungefähre Quinte ($\approx 1.47981 \neq \frac{3}{2}$), die sogenannte Wolfsquinte.

Überblick

Die Quinte und ~~der Wolf~~ die Oktave

Die gleichstufige Stimmung

Symmetrie der gleichstufigen Stimmung

Vom Ton zur Leiter – Idee der gleichstufigen Stimmung

Wir haben bereits gesehen, dass es nicht möglich ist, ein Tonsystem zu konstruieren, das

- oktav-periodisch ist,
- reine Oktaven besitzt,
- und reine Quinten besitzt,
- und das nur endlich viele Tonstufen pro Oktave besitzt.

Wir betrachten daher ein Tonsystem, das

- oktav-periodisch ist,
- reine Oktaven bestizt,
- 12 Tonstufen (sogenannter Halbtöne) pro Oktave besitzt
  (12 ist ein guter Kompromiss zwischen Handhabbarkeit und vernünftiger Approximation der reinen Intervalle),
- und dessen Tonstufen alle dasselbe Frequenzverhältnis haben (gleichstufige oder gleichschwebende Stimmung).

Wie groß ist ein gleichstufiger Halbton?

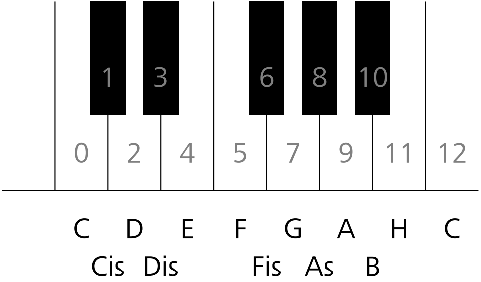
Grundidee der gleichstufigen Stimmung:

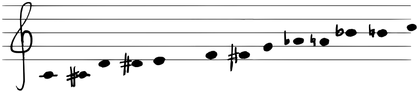
- Alle zwölf Halbtöne der Tonleiter sollen dasselbe Frequenzverhältnis haben!

Bestimmung dieses Frequenzverhältnisses:

$$
\begin{aligned}
12 \text{ Halbtöne} &= 1 \text{ Oktave} && \text{bzw.} \\
\text{Halbtonfrequenzverhältnis}^{12} &= 2 && \text{bzw.} \\
\text{Halbtonfrequenzverhältnis} &= \sqrt[12]{2} \\
&\approx 1.0594630\dots && \text{irrational!}
\end{aligned}
$$

Die gleichstufige Stimmung





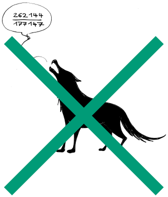
Wie rein sind gleichstufige Quinten?

Gleichstufige Quinte:

- entspricht sieben gleichstufigen Halbtönen,
- also dem Frequenzverhältnis

$$\sqrt[12]{2}^{7} \approx 1.49830\ldots \neq \frac{3}{2}.$$

- Alle gleichstufigen Quinten sind „zu klein“, aber gleich groß.
- Insbesondere: Kein Wolf mehr!



- …aber außer Oktaven keine reinen Intervalle!

Überblick

Die Quinte und ~~der Wolf~~ die Oktave

Die gleichstufige Stimmung

Symmetrie der gleichstufigen Stimmung

Wozu die gleichstufige Stimmung?

Grundprinzip der modernen Mathematik

Jede (mathematische) Theorie besteht aus

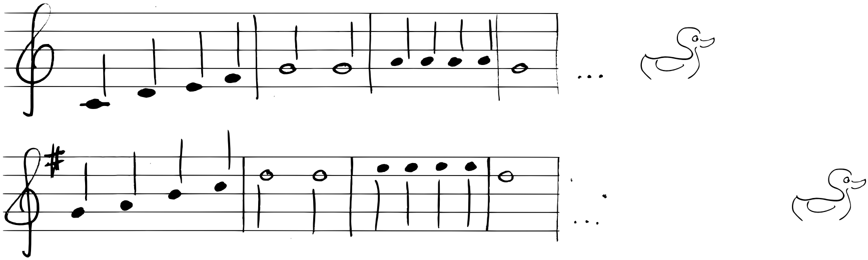
- Objekten und
- Morphismen.

In unserem Fall:

- Objekte: Bausteine der Musik: Töne, Intervalle, Tonleitern
- Morphismen: Werkzeugkasten der Musik:
  - Transpositionen/Modulationen
  - Inversionen
  - ...

Transposition

Transposition:
Verschiebung einer Tonfolge um eine gegebene Anzahl von Halbtönen

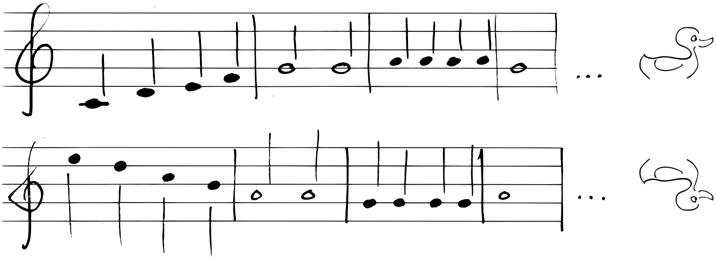


- Die Frequenzverhältnisse der Tonfolge ändern sich bei der gleichstufigen Stimmung nicht unter Transposition.
- Es sind also alle Tonarten spielbar.
- Historisch ist das die zentrale Motivation für die gleichstufige Stimmung.

Inversion

Inversion:

Umkehrung der Tonhöhenfolge bezüglich eines Referenztons



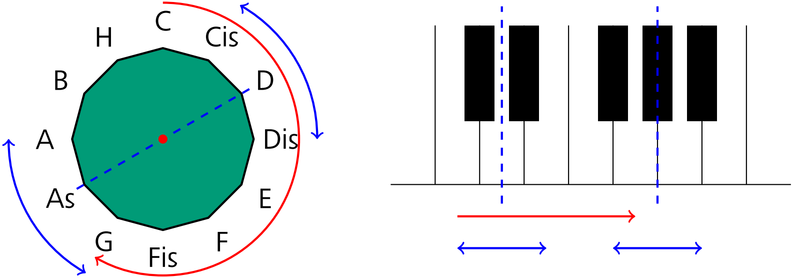
- Die Frequenzverhältnisse der Tonfolge drehen sich bei der gleichstufigen Stimmung unter Inversion um.

Ein einfaches Literaturbeispiel

J.S. Bach, BWV 846, Fuga I (in C)
[Bild aus Copyright-Gründen nicht online]

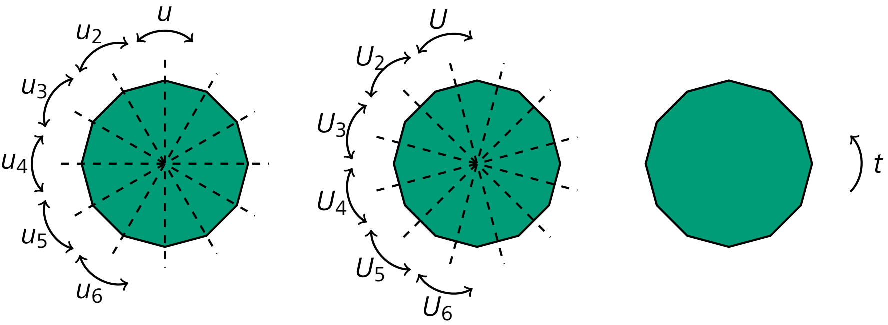
Ein geometrisches Analogon

Wir betrachten das regelmäßige Zwölfeck, beschriftet mit den Halbtönen:



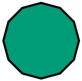
- Beispiel: Transposition um sieben Halbtöne nach oben
- Beispiel: Inversion an D bzw. As
  (auf dem Klavier leicht zu spielen)

Symmetrien des regelmäßigen Zwölfecks



- Spiegelungen: $u, u_2 = t^2 u, u_3 = t^4 u, \dots, U = tu, U_2 = t^3 u, U_3 = t^5 u, \dots$
- Drehungen: $t, t^2, t^3, \dots, t^{12} = \mathrm{id}, \dots, t^{-1} = t^{11}, \dots$
- Identität: id
- Weitere? Nein! Insgesamt also genau 24 Symmetrien.

Welche Struktur steht dahinter?

Symmetrien von  $= \{\mathrm{id}, u, t, t^2, \dots, t^{11}, tu, t^2u, \dots, t^{11}u\}$

Beobachtung

- Die Komposition zweier Isometrien ist eine Isometrie.
- Die Komposition von Isometrien ist assoziativ.
- Es gibt eine „langweilige“ Isometrie, die Identität.
- Isometrien besitzen Inverse.

Dies führt zum Begriff der Gruppe.

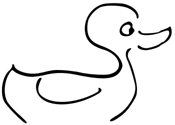
Algebra hilft!

$$\left(t^{1914}\ (utu)^{100}\ t^{-2014}\right)^{24} = \mathrm{id}$$

Zusammenfassung

Die gleichstufige Stimmung

- besitzt keine reinen Quinten,
- aber dafür viel Symmetrie.



Weiterführende Informationen:

- Hörbeispiele für verschiedene (Klavier-)Stimmungen:
  https://hearthis.at/praeludio/
- Mehr zur Symmetrie der gleichstufigen Stimmung:
  A.S. Crans, T.M. Fiore, R. Satyendra. Musical actions of dihedral groups. Amer. Math. Monthly 116 (2009), no. 6, 479–495.