

# Slitherlink-Kurven – Ein Zusammenspiel von Kombinatorik, Topologie und Geometrie

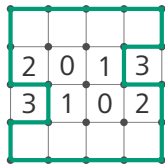
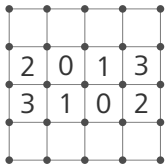
MNU-Landestagung. 02/2014. Regensburg

**Clara Löh**

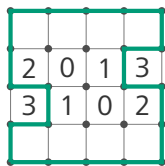
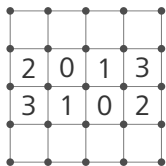
Fakultät für Mathematik. Universität Regensburg



# Überblick



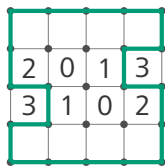
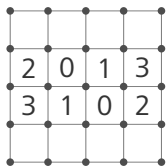
# Überblick



## Ziele

- ▶ Mathematik hilft Slitherlink zu verstehen

# Überblick

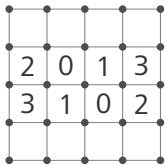


## Ziele

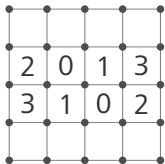
- ▶ Mathematik hilft Slitherlink zu verstehen
- ▶ Slitherlink hilft Mathematik zu verstehen



# Regeln von Slitherlink



# Regeln von Slitherlink



## Regeln (nikoli.co.jp)

点と点の間にタテヨコに線を引き、全体で1つの輪っかを作しましょう。

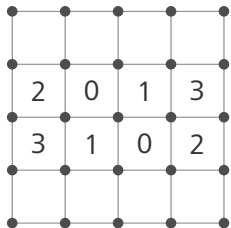
4つの点で作られた正方形の中にある数字は、その正方形の辺に引く線の数を表しています。数字のない正方形には、何本の線を引きかわかりません。

線を交差させたり、枝分かれさせたりしてはいけません。

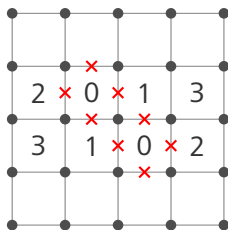
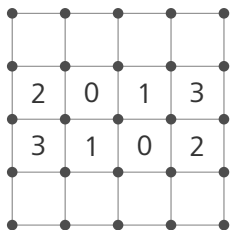




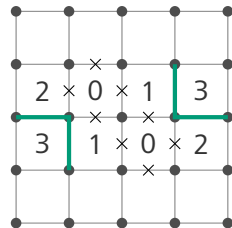
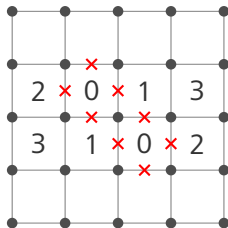
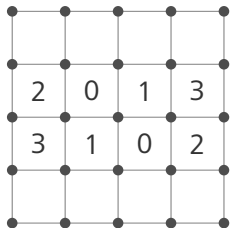
# Ein Beispiel-Puzzle



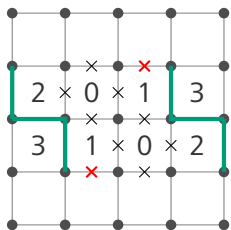
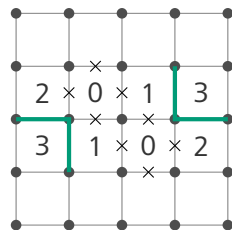
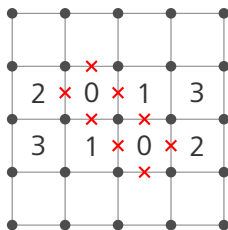
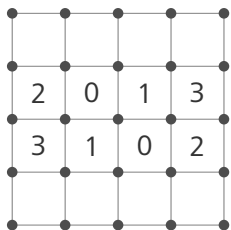
# Ein Beispiel-Puzzle



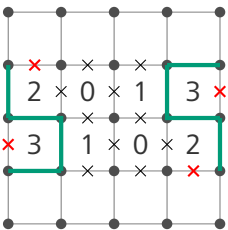
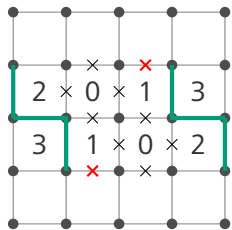
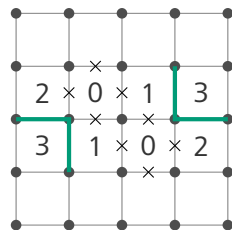
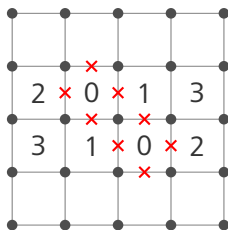
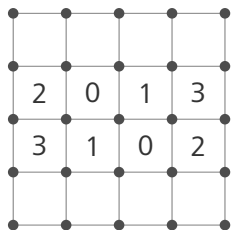
# Ein Beispiel-Puzzle



# Ein Beispiel-Puzzle



# Ein Beispiel-Puzzle





# Lokale Lösungsstrategien

Lokale Lösungsstrategien: Strategien,

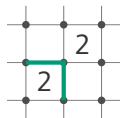
- ▶ die auf Ausschnitte des Puzzles anwendbar sind,
- ▶ und nur die Information aus diesem Ausschnitt verwenden.

# Lokale Lösungsstrategien

Lokale Lösungsstrategien: Strategien,

- ▶ die auf Ausschnitte des Puzzles anwendbar sind,
- ▶ und nur die Information aus diesem Ausschnitt verwenden.

Beispiel



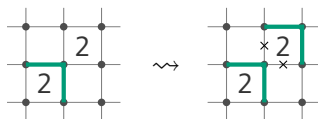


# Lokale Lösungsstrategien

Lokale Lösungsstrategien: Strategien,

- ▶ die auf Ausschnitte des Puzzles anwendbar sind,
- ▶ und nur die Information aus diesem Ausschnitt verwenden.

Beispiel

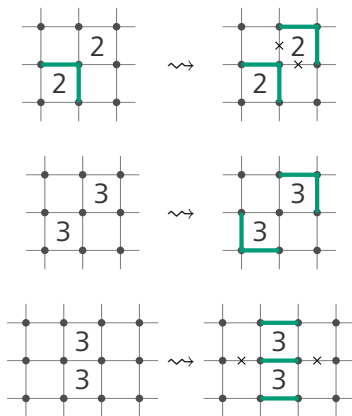


# Lokale Lösungsstrategien

Lokale Lösungsstrategien: Strategien,

- ▶ die auf Ausschnitte des Puzzles anwendbar sind,
- ▶ und nur die Information aus diesem Ausschnitt verwenden.

Beispiel



# Globale Lösungsstrategien

**Globale Lösungsstrategien:** Strategien, die Informationen über das gesamte Puzzle benötigen.

# Globale Lösungsstrategien

**Globale Lösungsstrategien:** Strategien, die Informationen über das gesamte Puzzle benötigen.

## Satz (Jordanscher Kurvensatz; Topologie)

*Jede einfach geschlossene Kurve in der Ebene zerlegt die Ebene in genau zwei Gebiete.*

*Der Rand dieser beiden Gebiete ist die gegebene geschlossene Kurve.*



# Globale Lösungsstrategien

**Globale Lösungsstrategien:** Strategien, die Informationen über das gesamte Puzzle benötigen.

## Satz (Jordanscher Kurvensatz; Topologie)

*Jede einfach geschlossene Kurve in der Ebene zerlegt die Ebene in genau zwei Gebiete.*

*Der Rand dieser beiden Gebiete ist die gegebene geschlossene Kurve.*



Aus dem Jordanschen Kurvensatz folgt:

- ▶ jede Lösungsschleife besitzt in jeder Zeile des Puzzles eine gerade Anzahl von vertikalen Kanten
- ▶ und analog in jeder Spalte eine gerade Anzahl von horizontalen Kanten.

# Lokal $\leftrightarrow$ global

Was macht Slitherlink zu einem so interessanten Puzzle?

Interaktion zwischen lokalen und globalen Bedingungen!

Was macht Slitherlink zu einem so interessanten Puzzle?

## Interaktion zwischen lokalen und globalen Bedingungen!

In der Mathematik gibt es viele solcher lokal-globaler Zusammenhänge:

- ▶ **Riemannsche Geometrie/geometrische Topologie:**  
Auswirkung lokaler Krümmungsvorgaben auf die globale Gestalt geometrischer Objekte.
- ▶ **Algebraische Zahlentheorie:**  
Zusammenhang zwischen Lösbarkeit von Gleichungen bzgl. Primzahlen/Stellen und Lösbarkeit über den rationalen Zahlen.
- ▶ ...

# Beispiel-Forschungsprojekt:



# Beispiel-Forschungsprojekt: Eindeutigkeit von Slitherlink-Kurven

0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0
1	3	2	2	2	2	1	2	2	3	2	3	2	2	1
0	2	3	2	2	1	0	1	2	2	1	1	3	2	1
1	2	2	2	2	1	0	1	2	2	1	1	3	1	1
1	2	3	2	2	1	0	1	3	2	2	1	3	2	1
1	2	2	2	2	1	1	1	2	1	2	2	2	2	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

## Problem

In einem Slitherlink-Puzzle stehe in jedem Feld eine Zahl.  
Besitzt dieses Puzzle dann höchstens eine Lösung?

# Eindeutigkeit von Slitherlink-Kurven?

## Beweis.

Es sei ein Slitherlink-Puzzle gegeben, bei dem in jedem Feld eine Zahl stehe. Außerdem gebe es mindestens eine Lösungsschleife  $L$  dieses Puzzles.



# Eindeutigkeit von Slitherlink-Kurven?

## Beweis.

Es sei ein Slitherlink-Puzzle gegeben, bei dem in jedem Feld eine Zahl stehe. Außerdem gebe es mindestens eine Lösungsschleife  $L$  dieses Puzzles.

- ▶ Da in jedem Feld des Puzzles eine Zahl steht, ist  $L$  auf jedem Feld vorgegeben.



# Eindeutigkeit von Slitherlink-Kurven?

## Beweis.

Es sei ein Slitherlink-Puzzle gegeben, bei dem in jedem Feld eine Zahl stehe. Außerdem gebe es mindestens eine Lösungsschleife  $L$  dieses Puzzles.

- ▶ Da in jedem Feld des Puzzles eine Zahl steht, ist  $L$  auf jedem Feld vorgegeben.
- ▶ Also ist auch die gesamte Lösungsschleife  $L$  vorgegeben.



# Eindeutigkeit von Slitherlink-Kurven?

## Beweis.

Es sei ein Slitherlink-Puzzle gegeben, bei dem in jedem Feld eine Zahl stehe. Außerdem gebe es mindestens eine Lösungsschleife  $L$  dieses Puzzles.

- ▶ Da in jedem Feld des Puzzles eine Zahl steht, ist  $L$  auf jedem Feld vorgegeben.
- ▶ Also ist auch die gesamte Lösungsschleife  $L$  vorgegeben.

Also kann das Puzzle keine weiteren Lösungen besitzen. □

# Eindeutigkeit von Slitherlink-Kurven?

## Beweis.

Es sei ein Slitherlink-Puzzle gegeben, bei dem in jedem Feld eine Zahl stehe. Außerdem gebe es mindestens eine Lösungsschleife  $L$  dieses Puzzles.

- ▶ Da in jedem Feld des Puzzles eine Zahl steht, ist  $L$  auf jedem Feld vorgegeben.
- ▶ Also ist auch die gesamte Lösungsschleife  $L$  vorgegeben.

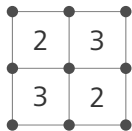
Also kann das Puzzle keine weiteren Lösungen besitzen. □

## Warnung

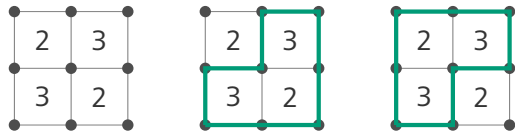
Dieser Beweis ist **nicht korrekt!**

In jedem Feld ist nur die **Anzahl** der Kanten, **nicht der Verlauf** vorgegeben!

# Ein zweideutiges Beispiel



# Ein zweideutiges Beispiel





# Modifikation des Problems

## Problem (modifiziertes Eindeutigkeitsproblem)

In einem Slitherlink-Puzzle, dessen Randfelder mit 0 beschriftet sind, stehe in jedem Feld eine Zahl. Besitzt dieses Puzzle dann höchstens eine Lösung?

# Modifikation des Problems

## Problem (modifiziertes Eindeutigkeitsproblem)

In einem Slitherlink-Puzzle, dessen Randfelder mit 0 beschriftet sind, stehe in jedem Feld eine Zahl. Besitzt dieses Puzzle dann höchstens eine Lösung?

## Beispiel

Variante des vorherigen Beispiels:

0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	3	2	0	0
0	1	2	3	1	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0

# Modifikation des Problems

## Problem (modifiziertes Eindeutigkeitsproblem)

In einem Slitherlink-Puzzle, dessen Randfelder mit 0 beschriftet sind, stehe in jedem Feld eine Zahl. Besitzt dieses Puzzle dann höchstens eine Lösung?

## Beispiel

Variante des vorherigen Beispiels: **eindeutig lösbar!**

0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	3	2	0	0
0	1	2	3	1	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	3	2	0	0
0	1	2	3	1	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0

# Modifikation des Problems

## Problem (modifiziertes Eindeutigkeitsproblem)

In einem Slitherlink-Puzzle, dessen Randfelder mit 0 beschriftet sind, stehe in jedem Feld eine Zahl. Besitzt dieses Puzzle dann höchstens eine Lösung?

## Beispiel

Variante des vorherigen Beispiels: **eindeutig lösbar!**



## Satz

*In einem Slitherlink-Puzzle, dessen Randfelder alle mit 0 beschriftet sind, stehe in jedem Feld eine Zahl. Dann gibt es höchstens eine Lösung.*

# Eindeutigkeit von Slitherlink-Kurven!

## Beweis.

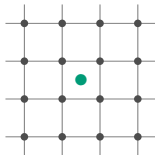
Es gebe mindestens eine Lösung. Wir zeigen **induktiv**, dass der Verlauf der Lösungsschleifen in jedem Feld (und somit global) eindeutig bestimmt ist:

# Eindeutigkeit von Slitherlink-Kurven!

## Beweis.

Es gebe mindestens eine Lösung. Wir zeigen **induktiv**, dass der Verlauf der Lösungsschleifen in jedem Feld (und somit global) eindeutig bestimmt ist:

- ▶ Wir betrachten in jedem Schritt das Feld ●, das unter den noch nicht betrachteten **am weitesten oben und dann am weitesten rechts** liegt.

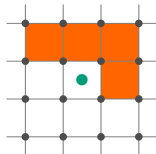


# Eindeutigkeit von Slitherlink-Kurven!

## Beweis.

Es gebe mindestens eine Lösung. Wir zeigen **induktiv**, dass der Verlauf der Lösungsschleifen in jedem Feld (und somit global) eindeutig bestimmt ist:

- ▶ Wir betrachten in jedem Schritt das Feld ●, das unter den noch nicht betrachteten **am weitesten oben und dann am weitesten rechts** liegt.



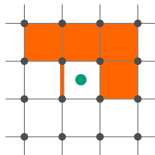
- ▶ Also ist der Verlauf in den **markierten Feldern** nach Induktionsvoraussetzung bzw. der Randfelderbedingung bekannt.

# Eindeutigkeit von Slitherlink-Kurven!

## Beweis.

Es gebe mindestens eine Lösung. Wir zeigen **induktiv**, dass der Verlauf der Lösungsschleifen in jedem Feld (und somit global) eindeutig bestimmt ist:

- ▶ Wir betrachten in jedem Schritt das Feld ●, das unter den noch nicht betrachteten **am weitesten oben und dann am weitesten rechts** liegt.



- ▶ Also ist der Verlauf in den **markierten Feldern** nach Induktionsvoraussetzung bzw. der Randfelderbedingung bekannt.
- ▶ Damit ist auch der Status der **markierten Kante** bekannt.

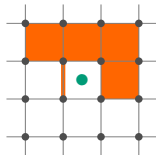


# Eindeutigkeit von Slitherlink-Kurven!

## Beweis.

Es gebe mindestens eine Lösung. Wir zeigen **induktiv**, dass der Verlauf der Lösungsschleifen in jedem Feld (und somit global) eindeutig bestimmt ist:

- ▶ Wir betrachten in jedem Schritt das Feld ●, das unter den noch nicht betrachteten **am weitesten oben und dann am weitesten rechts** liegt.



- ▶ Also ist der Verlauf in den **markierten Feldern** nach Induktionsvoraussetzung bzw. der Randfelderbedingung bekannt.
- ▶ Damit ist auch der Status der **markierten Kante** bekannt.
- ▶ Wegen der Zahl im Feld ● ist somit der gesamte Verlauf im Feld ● bekannt.



# Und jetzt?

Das modifizierte Eindeutigkeitsproblem ist gelöst . . .

# Und jetzt? Systematisch verallgemeinern!

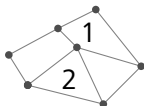
Das modifizierte Eindeutigkeitsproblem ist gelöst . . .

## Fragen

- ▶ Was haben wir dabei genau über Slitherlink-Puzzles verwendet?
- ▶ Wie kann man allgemeinere Slitherlink-Puzzles definieren?
- ▶ Lassen sich die Argumente auf die allgemeinere Situation übertragen?

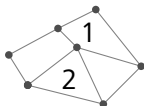
# Verallgemeinerte Slitherlink-Puzzle

Gegeben sei eine Zellenzerlegung einer Fläche; manche der Zellen enthalten Zahlen.



# Verallgemeinerte Slitherlink-Puzzle

Gegeben sei eine Zellenzerlegung einer Fläche; manche der Zellen enthalten Zahlen.



## Regeln (verallgemeinerte Slitherlink-Puzzle)

- ▶ Verbinde benachbarte Knoten so durch Kanten, dass sich insgesamt eine einzelne Schleife ergibt.
- ▶ Die Zahlen geben an, wieviele Kanten an ein Feld angrenzen; leere Zellen grenzen an eine unbekannte Anzahl von Kanten.
- ▶ Die Schleife schneidet sich nicht selbst und enthält keine Abzweigungen.

# Verallgemeinertes Eindeutigkeitsproblem für Slitherlink-Kurven

## Problem (verallgemeinertes Eindeutigkeitsproblem)

In einem verallgemeinerten Slitherlink-Puzzle, dessen Randfelder mit 0 beschriftet sind, stehe in jedem Feld eine Zahl. Besitzt dieses Puzzle dann höchstens eine Lösung?

# Verallgemeinertes Eindeutigkeitsproblem für Slitherlink-Kurven

## Problem (verallgemeinertes Eindeutigkeitsproblem)

In einem verallgemeinerten Slitherlink-Puzzle, dessen Randfelder mit 0 beschriftet sind, stehe in jedem Feld eine Zahl. Besitzt dieses Puzzle dann höchstens eine Lösung?

## Fragen

- ▶ Was sind geeignete bzw. interessante Zellenzerlegungen der Ebene?
- ▶ Kommen auch andere Flächen in Frage?
- ▶ Welche Zellenzerlegungen bieten sich auf solchen Flächen an?

# Besondere Zellenzerlegungen der euklidischen Ebene

Besondere Zellenzerlegungen der Ebene sind die **regulären Pflasterungen**:

- ▶ Alle Zellen sind isometrisch zueinander,
- ▶ jede Zelle ist ein regelmäßiges Polygon,
- ▶ und an jeder Ecke trifft sich dieselbe Anzahl von Zellen.

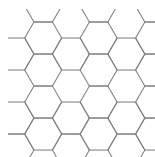
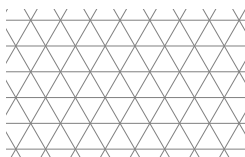
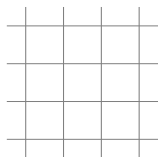


# Besondere Zellenzerlegungen der euklidischen Ebene

Besondere Zellenzerlegungen der Ebene sind die **regulären Pflasterungen**:

- ▶ Alle Zellen sind isometrisch zueinander,
- ▶ jede Zelle ist ein regelmäßiges Polygon,
- ▶ und an jeder Ecke trifft sich dieselbe Anzahl von Zellen.

Es gibt nur drei solcher regulären Pflasterungen der euklidischen Ebene:



# Eindeutigkeitsproblem für reguläre Zellenzerlegungen der euklidischen Ebene

## Satz

*In einem verallgemeinerten ebenen Slitherlink-Puzzle, das auf einer*

- ▶ quadratischen,*
- ▶ regulären dreieckigen, oder*
- ▶ reguläre hexagonalen*

*Zellenzerlegung beruht, dessen Randfelder mit 0 beschriftet sind, und bei dem in jedem Feld eine Zahl steht, gibt es höchstens eine Lösung.*

# Eindeutigkeitsproblem für reguläre Zellenzerlegungen der euklidischen Ebene

## Satz

*In einem verallgemeinerten ebenen Slitherlink-Puzzle, das auf einer*

- ▶ *quadratischen,*
- ▶ *regulären dreieckigen, oder*
- ▶ *reguläre hexagonalen*

*Zellenzerlegung beruht, dessen Randfelder mit 0 beschriftet sind, und bei dem in jedem Feld eine Zahl steht, gibt es höchstens eine Lösung.*

## Beweis.

Dies beruht wie im quadratischen Fall auf einem Induktionsargument und einer entsprechenden Analyse der bereits bekannten Felder/Kanten. □

# Ist das Eindeutigkeitsproblem ein topologisches Problem?

## Problem

Gilt der obige Satz für **alle** Zellenzerlegungen der euklidischen Ebene?

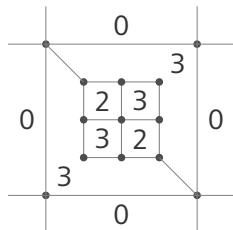
# Ist das Eindeutigkeitsproblem ein topologisches Problem?

## Problem

Gilt der obige Satz für **alle** Zellenzerlegungen der euklidischen Ebene?

## Beispiel

Nein, denn:



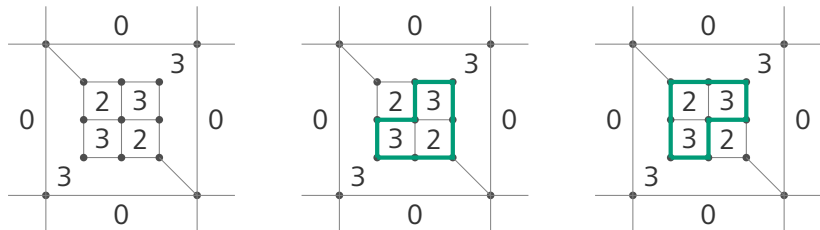
# Ist das Eindeutigkeitsproblem ein topologisches Problem?

## Problem

Gilt der obige Satz für **alle** Zellenzerlegungen der euklidischen Ebene?

## Beispiel

Nein, denn:



# Zweidimensionale Geometrien

## Krümmungstrichotomie

Es gibt im wesentlichen drei zweidimensionale Geometrien konstanter Krümmung:

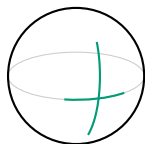
- ▶ Sphäre
- ▶ Euklidische Ebene
- ▶ Hyperbolische Ebene

# Zweidimensionale Geometrien

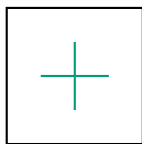
## Krümmungstrichotomie

Es gibt im wesentlichen drei zweidimensionale Geometrien konstanter Krümmung:

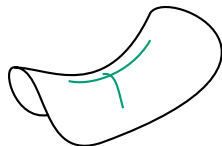
- ▶ Sphäre
- ▶ Euklidische Ebene
- ▶ Hyperbolische Ebene



sphärisch  
positiv



euklidisch  
flach



hyperbolisch  
negativ



# Sphäre – reguläre Zellenzerlegungen

Reguläre Zellenzerlegungen der Sphäre entsprechen den regulären Polyedern:

- ▶ Tetraeder
- ▶ Oktaeder
- ▶ Würfel
- ▶ Dodekaeder
- ▶ Ikosaeder

# Sphäre – Eindeutigkeitsproblem

## Satz

*Für jede reguläre Zellenzerlegung der Sphäre gibt es ein verallgemeinertes Slitherlink-Puzzle (dessen Randfelder mit 0 beschriftet sind), so dass in jedem Feld eine Zahl steht, das Puzzle aber **mehrere Lösungen** besitzt.*

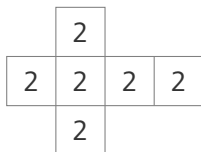
# Sphäre – Eindeutigkeitsproblem

## Satz

Für jede reguläre Zellenzerlegung der Sphäre gibt es ein verallgemeinertes Slitherlink-Puzzle (dessen Randfelder mit 0 beschriftet sind), so dass in jedem Feld eine Zahl steht, das Puzzle aber *mehrere Lösungen* besitzt.

## Beweis.

Wir geben hier nur den Beweis für den **Würfel**:



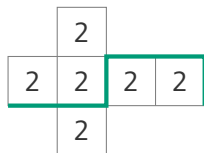
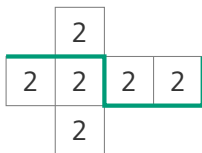
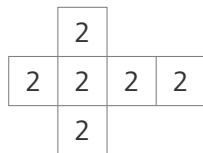
# Sphäre – Eindeutigkeitsproblem

## Satz

Für jede reguläre Zellenzerlegung der Sphäre gibt es ein verallgemeinertes Slitherlink-Puzzle (dessen Randfelder mit 0 beschriftet sind), so dass in jedem Feld eine Zahl steht, das Puzzle aber *mehrere Lösungen* besitzt.

## Beweis.

Wir geben hier nur den Beweis für den **Würfel**:



# Hyperbolische Ebene – reguläre Zellenzerlegungen

Seien  $p, q \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}.$$

Dann gibt es eine reguläre Zellenzerlegung der hyperbolischen Ebene aus regulären  $p$ -Ecken, wobei sich in jeder Ecke je  $q$  dieser  $p$ -Ecke treffen.

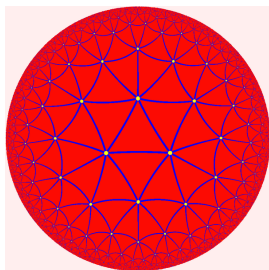
# Hyperbolische Ebene – reguläre Zellenzerlegungen

Seien  $p, q \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  mit

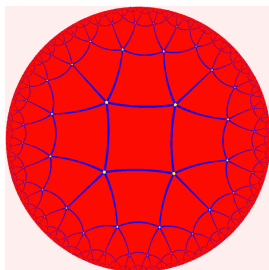
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}.$$

Dann gibt es eine reguläre Zellenzerlegung der hyperbolischen Ebene aus regulären  $p$ -Ecken, wobei sich in jeder Ecke je  $q$  dieser  $p$ -Ecke treffen.

Beispiel ([http://en.wikipedia.org/wiki/Uniform\\_tilings\\_in\\_hyperbolic\\_plane](http://en.wikipedia.org/wiki/Uniform_tilings_in_hyperbolic_plane))



$$p = 3, q = 7$$



$$p = 4, q = 5$$

# Hyperbolische Ebene – Eindeutigkeitsproblem

## Satz

*Seien  $p, q \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$ . Dann besitzt jedes verallgemeinerte Slitherlink-Puzzle auf einer  $(p, q)$ -regulären hyperbolischen Zellenzerlegung, dessen Randfelder alle mit 0 beschriftet sind und dessen Felder alle eine Zahl enthalten, höchstens eine Lösung.*

# Hyperbolische Ebene – Eindeutigkeitsproblem

## Satz

*Seien  $p, q \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$ . Dann besitzt jedes verallgemeinerte Slitherlink-Puzzle auf einer  $(p, q)$ -regulären hyperbolischen Zellenzerlegung, dessen Randfelder alle mit 0 beschriftet sind und dessen Felder alle eine Zahl enthalten, höchstens eine Lösung.*

## Beweis.

Wie im Fall der euklidischen Ebene beruht der Beweis auf

- ▶ einem induktiven Argument
- ▶ und einer Analyse der Kombinatorik der bereits behandelten Felder.

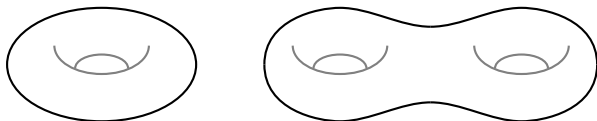




Und jetzt?

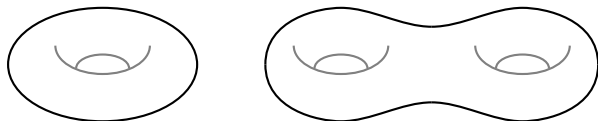
# Und jetzt? Systematisch verallgemeinern!

- ▶ Was passiert auf **anderen Flächen**?



# Und jetzt? Systematisch verallgemeinern!

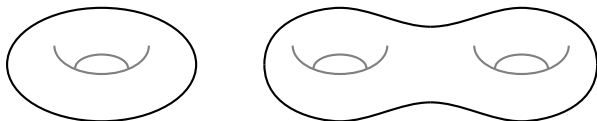
- ▶ Was passiert auf **anderen Flächen**?



- ▶ Was passiert bei **irregulären Zellenzerlegungen**?

# Und jetzt? Systematisch verallgemeinern!

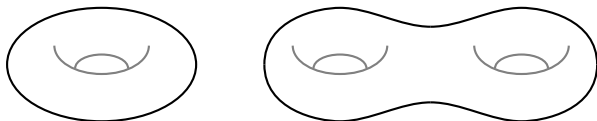
- ▶ Was passiert auf **anderen Flächen**?



- ▶ Was passiert bei **irregulären Zellenzerlegungen**?
- ▶ Was passiert für **randlose (unendliche) Slitherlink-Kurven**, die nicht geschlossen sind?

# Und jetzt? Systematisch verallgemeinern!

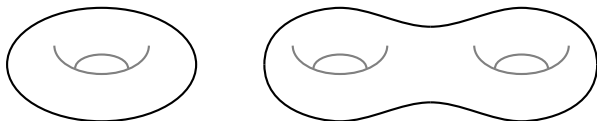
- ▶ Was passiert auf **anderen Flächen**?



- ▶ Was passiert bei **irregulären Zellenzerlegungen**?
- ▶ Was passiert für **randlose (unendliche) Slitherlink-Kurven**, die nicht geschlossen sind?
- ▶ Was passiert in **höheren Dimensionen**?

# Und jetzt? Systematisch verallgemeinern!

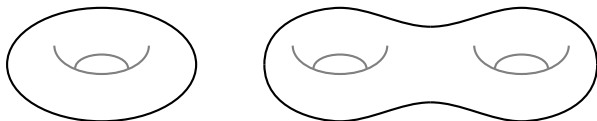
- ▶ Was passiert auf **anderen Flächen**?



- ▶ Was passiert bei **irregulären Zellenzerlegungen**?
- ▶ Was passiert für **randlose (unendliche) Slitherlink-Kurven**, die nicht geschlossen sind?
- ▶ Was passiert in **höheren Dimensionen**?
- ▶ ...

# Und jetzt? Systematisch verallgemeinern!

- ▶ Was passiert auf **anderen Flächen**?



- ▶ Was passiert bei **irregulären Zellenzerlegungen**?
- ▶ Was passiert für **randlose (unendliche) Slitherlink-Kurven**, die nicht geschlossen sind?
- ▶ Was passiert in **höheren Dimensionen**?
- ▶ ...
- ▶ Der Phantasie sind keine Grenzen gesetzt!

# Zusammenfassung

Wir sind zwei fundamentalen mathematischen Phänomenen begegnet:

- ▶ Lokal  $\leftrightarrow$  global
- ▶ Krümmungstrichotomie



# Zusammenfassung

Wir sind zwei **fundamentalen mathematischen Phänomenen** begegnet:

- ▶ Lokal  $\leftrightarrow$  global
- ▶ Krümmungstrichotomie

Wir haben zentrale **mathematische Techniken** kennengelernt:

- ▶ Ein **Beispiel** sagt mehr als tausend Worte
- ▶ **Feinabstimmung** der Problemstellung
- ▶ **Abstraktion** und Übersetzung auf **systematisch verallgemeinerte** Situationen

# Zusammenfassung

Wir sind zwei **fundamentalen mathematischen Phänomenen** begegnet:

- ▶ Lokal  $\leftrightarrow$  global
- ▶ Krümmungstrichotomie

Wir haben zentrale **mathematische Techniken** kennengelernt:

- ▶ Ein **Beispiel** sagt mehr als tausend Worte
- ▶ **Feinabstimmung** der Problemstellung
- ▶ **Abstraktion** und Übersetzung auf **systematisch verallgemeinerte** Situationen

Material zu Slitherlink **für Schüler**:

- ▶ **Schülerzirkel Mathematik**: Zahlenschleifen (Thema 2013/14-2)