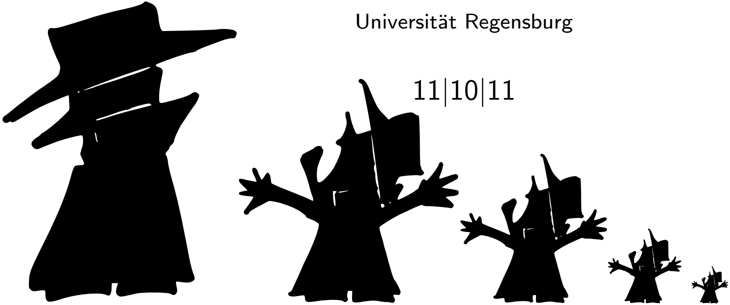
Solitär: Es kann nur einen geben – aber wo?

Clara Löh

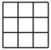
Universität Regensburg

11|10|11



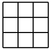
Spielregeln

- Agenten tummeln sich in einer Welt, die von Bürokraten in quadratische Felder aufgeteilt wurde.



Spielregeln

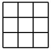
- Agenten tummeln sich in einer Welt, die von Bürokraten in quadratische Felder aufgeteilt wurde.



- In jedem Feld kann sich jeweils höchstens ein Agent befinden.

Spielregeln

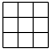
- Agenten tummeln sich in einer Welt, die von Bürokraten in quadratische Felder aufgeteilt wurde.



- In jedem Feld kann sich jeweils höchstens ein Agent befinden.
- Ein Agent kann sich nur dann bewegen, wenn er einen Agenten auf einem benachbarten Feld „verschwinden“ lässt;

Spielregeln

- Agenten tummeln sich in einer Welt, die von Bürokraten in quadratische Felder aufgeteilt wurde.



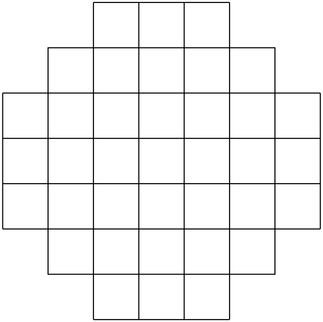
- In jedem Feld kann sich jeweils höchstens ein Agent befinden.
- Ein Agent kann sich nur dann bewegen, wenn er einen Agenten auf einem benachbarten Feld „verschwinden“ lässt;
- damit der Verdacht nicht auf ihn fällt, wird er sich natürlich (in derselben Richtung) noch ein Feld weiterbewegen (dieses Feld muss frei sein).

Kann es nur einen geben?

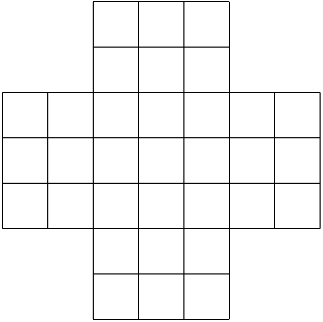
Problem

- Kann es passieren, dass nur genau ein Agent überlebt?
- Wenn ja, wo?

Solitär – europäisch



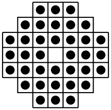
Solitär – englisch



Europäisch – kann es nur einen geben?

Problem

Kann es passieren, dass auf dem europäischen Brett nur ein einzelner Agent überlebt, wenn zu Beginn nur das mittlere Feld frei ist?



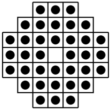
Mögliche Strategien:

- Alle möglichen Zugkombinationen durchprobieren.

Europäisch – kann es nur einen geben?

Problem

Kann es passieren, dass auf dem europäischen Brett nur ein einzelner Agent überlebt, wenn zu Beginn nur das mittlere Feld frei ist?



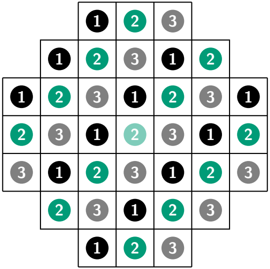
Mögliche Strategien:

- Alle möglichen Zugkombinationen durchprobieren.
- Mathematik!

Europäisch – kann es nur einen geben?

Idee

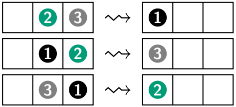
Wir färben die Felder des Brettes und untersuchen, was in einem Zug passieren kann.



Europäisch – kann es nur einen geben?

Beobachtung:

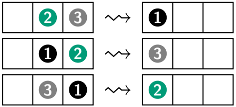
- In jedem Zug tritt eine der folgenden Situationen ein:



Europäisch – kann es nur einen geben?

Beobachtung:

- In jedem Zug tritt eine der folgenden Situationen ein:

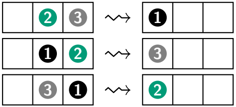


- Also: Nach jedem Zug ändert sich die Parität von ❶, ❷, ❸.

Europäisch – kann es nur einen geben?

Beobachtung:

- In jedem Zug tritt eine der folgenden Situationen ein:



- Also: Nach jedem Zug ändert sich die Parität von ❶, ❷, ❸.
- Startkonfiguration:
  (❶ gerade, ❷ gerade, ❸ gerade)

Europäisch – kann es nur einen geben?

Beobachtung:

- In jedem Zug tritt eine der folgenden Situationen ein:

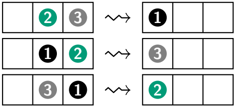
	❷	❸	$\rightsquigarrow$	❶		
	❶	❷	$\rightsquigarrow$	❸		
	❸	❶	$\rightsquigarrow$	❷		

- Also: Nach jedem Zug ändert sich die Parität von ❶, ❷, ❸.
- Startkonfiguration:
  (❶ gerade, ❷ gerade, ❸ gerade)
- Was wäre, wenn nur ein Agent übrigbliebe?

Europäisch – kann es nur einen geben?

Beobachtung:

- In jedem Zug tritt eine der folgenden Situationen ein:

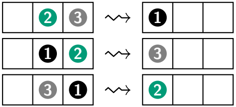


- Also: Nach jedem Zug ändert sich die Parität von ❶, ❷, ❸.
- Startkonfiguration:
  (❶ gerade, ❷ gerade, ❸ gerade)
- Was wäre, wenn nur ein Agent übrigbliebe?
  - Wieviele Züge wären dafür nötig?

Europäisch – kann es nur einen geben?

Beobachtung:

- In jedem Zug tritt eine der folgenden Situationen ein:

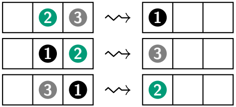


- Also: Nach jedem Zug ändert sich die Parität von ❶, ❷, ❸.
- Startkonfiguration:
  (❶ gerade, ❷ gerade, ❸ gerade)
- Was wäre, wenn nur ein Agent übrigbliebe?
  - Wieviele Züge wären dafür nötig? 35 Züge (ungerade!)

Europäisch – kann es nur einen geben?

Beobachtung:

- In jedem Zug tritt eine der folgenden Situationen ein:

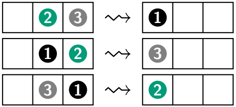


- Also: Nach jedem Zug ändert sich die Parität von ❶, ❷, ❸.
- Startkonfiguration:
  (❶ gerade, ❷ gerade, ❸ gerade)
- Was wäre, wenn nur ein Agent übrigbliebe?
  - Wieviele Züge wären dafür nötig? 35 Züge (ungerade!)
  - Welchen Gesamtwert hätte also diese Endposition?
    (❶ ungerade, ❷ ungerade, ❸ ungerade)

Europäisch – kann es nur einen geben?

Beobachtung:

- In jedem Zug tritt eine der folgenden Situationen ein:

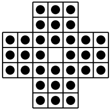


- Also: Nach jedem Zug ändert sich die Parität von ❶, ❷, ❸.
- Startkonfiguration:
  (❶ gerade, ❷ gerade, ❸ gerade)
- Was wäre, wenn nur ein Agent übrigbliebe?
  - Wieviele Züge wären dafür nötig? 35 Züge (ungerade!)
  - Welchen Gesamtwert hätte also diese Endposition?
    (❶ ungerade, ❷ ungerade, ❸ ungerade)
- Also: Auf dem europäischen Brett kann nicht ein einzelner Agent überleben, wenn zu Beginn nur das mittlere Feld frei ist!

Wo ist 007?

Problem

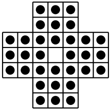
Kann es passieren, dass auf dem englischen Brett nur ein einzelner Agent überlebt, wenn zu Beginn das nur mittlere Feld frei ist?



Wo ist 007?

Problem

Kann es passieren, dass auf dem englischen Brett nur ein einzelner Agent überlebt, wenn zu Beginn das nur mittlere Feld frei ist?

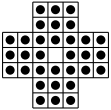


Ja, z.B. ist es möglich, dass ein einzelner Agent auf dem mittleren Feld oder auf einem der mittleren Randfelder übrigbleibt (ausprobieren!).
(Tatsächlich sind diese beiden Konstellationen „gleichschwierig").

Wo ist 007?

Problem

Kann es passieren, dass auf dem englischen Brett nur ein einzelner Agent überlebt, wenn zu Beginn das nur mittlere Feld frei ist?



Ja, z.B. ist es möglich, dass ein einzelner Agent auf dem mittleren Feld oder auf einem der mittleren Randfelder übrigbleibt (ausprobieren!). (Tatsächlich sind diese beiden Konstellationen „gleichschwierig").

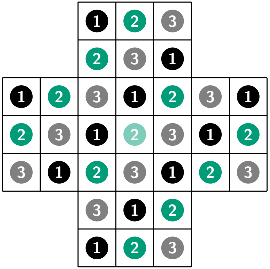
Problem

Auf welchen Feldern kann der letzte Agent sein, wenn zu Beginn nur das mittlere Feld auf dem englischen Brett frei ist?

Wo ist 007?

Idee

Wir färben das Brett analog zum europäischen Brett.



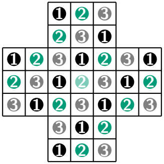
Wo ist 007?

		❶	❷	❸		
		❷	❸	❶		
❶	❷	❸	❶	❷	❸	❶
❷	❸	❶	❷	❸	❶	❷
❸	❶	❷	❸	❶	❷	❸
		❸	❶	❷		
		❶	❷	❸		

Beobachtung:

- Wie beim europäischen Brett gilt:
  Nach jedem Zug ändert sich die Parität von ❶, ❷, ❸.

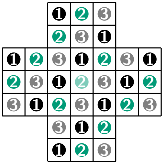
Wo ist 007?



Beobachtung:

- Wie beim europäischen Brett gilt:
  Nach jedem Zug ändert sich die Parität von ❶, ❷, ❸.
- Startkonfiguration:
  (❶ ungerade, ❷ gerade, ❸ ungerade)

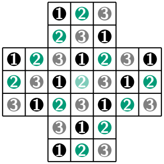
Wo ist 007?



Beobachtung:

- Wie beim europäischen Brett gilt:
  Nach jedem Zug ändert sich die Parität von ❶, ❷, ❸.
- Startkonfiguration:
  (❶ ungerade, ❷ gerade, ❸ ungerade)
- Was wäre, wenn nur ein Agent übrigbliebe?

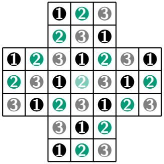
Wo ist 007?



Beobachtung:

- Wie beim europäischen Brett gilt:
  Nach jedem Zug ändert sich die Parität von ❶, ❷, ❸.
- Startkonfiguration:
  (❶ ungerade, ❷ gerade, ❸ ungerade)
- Was wäre, wenn nur ein Agent übrigbliebe?
  - Wieviele Züg wären dafür nötig? 31 Züge (ungerade!).

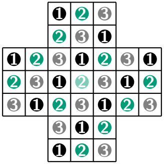
Wo ist 007?



Beobachtung:

- Wie beim europäischen Brett gilt:
  Nach jedem Zug ändert sich die Parität von ❶, ❷, ❸.
- Startkonfiguration:
  (❶ ungerade, ❷ gerade, ❸ ungerade)
- Was wäre, wenn nur ein Agent übrigbliebe?
  - Wieviele Züg wären dafür nötig? 31 Züge (ungerade!).
  - Welchen Gesamtwert hätte also diese Endposition?
    (❶ gerade, ❷ ungerade, ❸ gerade)

Wo ist 007?

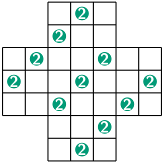


Beobachtung:

- Wie beim europäischen Brett gilt:
  Nach jedem Zug ändert sich die Parität von ❶, ❷, ❸.
- Startkonfiguration:
  (❶ ungerade, ❷ gerade, ❸ ungerade)
- Was wäre, wenn nur ein Agent übrigbliebe?
  - Wieviele Züg wären dafür nötig? 31 Züge (ungerade!).
  - Welchen Gesamtwert hätte also diese Endposition?
    (❶ gerade, ❷ ungerade, ❸ gerade)
- Also: Falls nur ein einziger Agent überlebt, so muss dieser am Schluss auf einem Feld der Farbe ❷ sein.

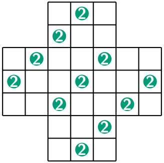
Wo ist 007?

Daher kommen nur die folgenden Felder in Frage:



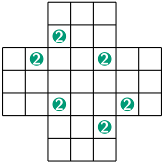
Wo ist 007?

Daher kommen nur die folgenden Felder in Frage:



Problem

Sind die Felder



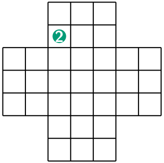
tatsächlich als alleinige Endfelder möglich?

Wo ist 007?

Idee

Symmetrie des Spiels nutzen!

- Wenn die linke Position möglich wäre, dann wäre auch die rechte Position möglich



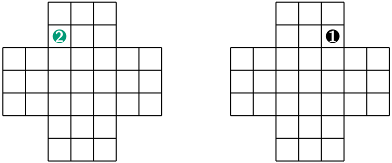
(indem wir alle Züge an der vertikalen Symmetrieachse des Spielbretts spiegeln).

Wo ist 007?

Idee

Symmetrie des Spiels nutzen!

- Wenn die linke Position möglich wäre, dann wäre auch die rechte Position möglich



(indem wir alle Züge an der vertikalen Symmetrieachse des Spielbretts spiegeln).

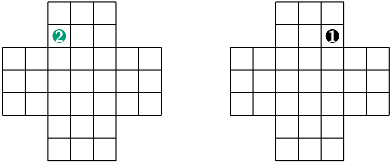
- Letztere Position ist aber nicht erreichbar, da sie in der obigen Färbung, die Farbe ❶ und nicht die Farbe ❷ hat.

Wo ist 007?

Idee

Symmetrie des Spiels nutzen!

- Wenn die linke Position möglich wäre, dann wäre auch die rechte Position möglich



(indem wir alle Züge an der vertikalen Symmetrieachse des Spielbretts spiegeln).

- Letztere Position ist aber nicht erreichbar, da sie in der obigen Färbung, die Farbe ❶ und nicht die Farbe ❷ hat.
- So kann man zeigen, dass nur das mittlere Feld und die mittleren Randfelder als alleinige Endposition auftreten können.

Ausblick: Lineare Algebra

In den obigen Problemen haben wir jeweils betrachtet, ob gewisse Größen gerade oder ungerade sind.

Ausblick: Lineare Algebra

In den obigen Problemen haben wir jeweils betrachtet, ob gewisse Größen gerade oder ungerade sind.

In der (Linearen) Algebra werden Strukturen eingeführt und untersucht (z.B. Arithmetik modulo 2), die es erlauben mit solchen Größen eleganter umzugehen und zu argumentieren.

Ausblick: Lineare Algebra

Problem

Wie kann man mit Paritäten „rechnen"?

- Wir definieren auf der Menge $\mathbb{F}_2 := \{g, u\}$ die folgenden Operationen:

$+$	g	u
g	g	u
u	u	g

$\cdot$	g	u
g	g	g
u	g	u

Ausblick: Lineare Algebra

Problem

Wie kann man mit Paritäten „rechnen"?

- Wir definieren auf der Menge $\mathbb{F}_2 := \{g, u\}$ die folgenden Operationen:

$$\begin{array}{c|cc} + & g & u \\ \hline g & g & u \\ u & u & g \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & g & u \\ \hline g & g & g \\ u & g & u \end{array}$$

- Es stellt sich heraus, dass in $\mathbb{F}_2$ dieselben wesentlichen algebraischen Rechengesetze (Kommutativität, Assoziativität, etc.) erfüllt sind wie in $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$.

Ausblick: Lineare Algebra

Problem

Wie kann man mit Paritäten „rechnen“?

- Wir definieren auf der Menge $\mathbb{F}_2 := \{g, u\}$ die folgenden Operationen:

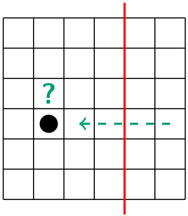
$$\begin{array}{c|cc} + & g & u \\ \hline g & g & u \\ u & u & g \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & g & u \\ \hline g & g & g \\ u & g & u \end{array}$$

- Es stellt sich heraus, dass in $\mathbb{F}_2$ dieselben wesentlichen algebraischen Rechengesetze (Kommutativität, Assoziativität, etc.) erfüllt sind wie in $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$.
- Daher kann man zum Beispiel auch Vektorräume über $\mathbb{F}_2$ betrachten. Zum Beispiel könnte man die obigen Invarianten als Invarianten in ${\mathbb{F}_2}^3$ ansehen.

Wie weit können Agenten in ein fremdes Land eindringen?

Problem

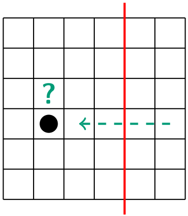
Wie weit kann eine Gruppe von Agenten in das Innere eines Landes vordringen?



Wie weit können Agenten in ein fremdes Land eindringen?

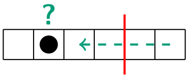
Problem

Wie weit kann eine Gruppe von Agenten in das Innere eines Landes vordringen?



Problem

Wie weit kann eine Gruppe von Agenten auf einem eindimensionalen Spielbrett in das Innere eines Landes vordringen?



Eindimensionale Invasion

Idee

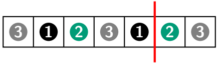
Wir suchen wieder eine Invariante, indem wir (belegte) Felder geeignet bewerten.

Eindimensionale Invasion

Idee

Wir suchen wieder eine Invariante, indem wir (belegte) Felder geeignet bewerten.

Wir können aber nicht wie bisher vorgehen, da wir mit solchen Färbungen nicht erkennen können wie weit Felder von der Grenze entfernt sind.

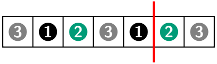


Eindimensionale Invasion

Idee

Wir suchen wieder eine Invariante, indem wir (belegte) Felder geeignet bewerten.

Wir können aber nicht wie bisher vorgehen, da wir mit solchen Färbungen nicht erkennen können wie weit Felder von der Grenze entfernt sind.



Idee

Wir bewerten Felder, die weit außerhalb des Landes liegen, niedriger als solche, die nahe an der Grenze oder gar im Inneren des Landes liegen.

Eindimensionale Invasion

Genauer: Wir betrachten folgende Bewertung der (belegten) Felder,

			x^{-2}	x^{-1}	x^{0}	x^{1}

Eindimensionale Invasion

Genauer: Wir betrachten folgende Bewertung der (belegten) Felder,

			x^{-2}	x^{-1}	x^0	x^1

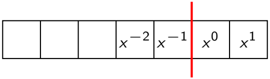
wobei

$$x := \frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \approx 0.6180\dots$$

[Dabei ist $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ der goldene Schnitt.]

Eindimensionale Invasion

Genauer: Wir betrachten folgende Bewertung der (belegten) Felder,



wobei

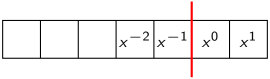
$$x := \frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \approx 0.6180\ldots$$

[Dabei ist $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ der goldene Schnitt.]

Man beachte, dass $x^2 + x = 1$ ist.

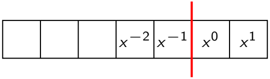
Eindimensionale Invasion

Liefert dies tatsächlich eine geeignete Invariante?



Eindimensionale Invasion

Liefert dies tatsächlich eine geeignete Invariante?



In jedem Zug tritt einer der beiden folgenden Fälle ein:

1. $x^{n+1} + x^{n+2} \quad \rightsquigarrow \quad x^{n}$

Eindimensionale Invasion

Liefert dies tatsächlich eine geeignete Invariante?

			x^{-2}	x^{-1}	x^0	x^1

In jedem Zug tritt einer der beiden folgenden Fälle ein:

① $x^{n+1} + x^{n+2} \quad \rightsquigarrow \quad x^n = 1 \cdot x^n = (x^2 + x) \cdot x = x^{n+1} + x^{n+2}$

Eindimensionale Invasion

Liefert dies tatsächlich eine geeignete Invariante?

			x^{-2}	x^{-1}	x^0	x^1

In jedem Zug tritt einer der beiden folgenden Fälle ein:

① $x^{n+1} + x^{n+2} \quad \rightsquigarrow \quad x^n = 1 \cdot x^n = (x^2 + x) \cdot x = x^{n+1} + x^{n+2}$

② $x^{n-2} + x^{n-1} \quad \rightsquigarrow \quad x^n$

Eindimensionale Invasion

Liefert dies tatsächlich eine geeignete Invariante?

			x^{-2}	x^{-1}	x^0	x^1

In jedem Zug tritt einer der beiden folgenden Fälle ein:

① $x^{n+1} + x^{n+2} \quad \rightsquigarrow \quad x^n = 1 \cdot x^n = (x^2 + x) \cdot x = x^{n+1} + x^{n+2}$

② $x^{n-2} + x^{n-1} \quad \rightsquigarrow \quad x^n \leq x^{n-2} + x^{n-1}$

Eindimensionale Invasion

Beobachtung:

- Der Gesamtwert der belegten Felder wird in keinem Zug größer.

Eindimensionale Invasion

Beobachtung:

- Der Gesamtwert der belegten Felder wird in keinem Zug größer.
- Insbesondere ist der Gesamtwert jeder Folgekonstellation höchstens so groß wie der Gesamtwert der Startkonstellation.

Eindimensionale Invasion

Beobachtung:

- Der Gesamtwert der belegten Felder wird in keinem Zug größer.
- Insbesondere ist der Gesamtwert jeder Folgekonstellation höchstens so groß wie der Gesamtwert der Startkonstellation.
- Der Gesamtwert der Startkonstellation ist höchstens

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^N$$

Eindimensionale Invasion

Beobachtung:

- Der Gesamtwert der belegten Felder wird in keinem Zug größer.
- Insbesondere ist der Gesamtwert jeder Folgekonstellation höchstens so groß wie der Gesamtwert der Startkonstellation.
- Der Gesamtwert der Startkonstellation ist höchstens

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} < \frac{1}{1 - x}$$

Eindimensionale Invasion

Beobachtung:

- Der Gesamtwert der belegten Felder wird in keinem Zug größer.
- Insbesondere ist der Gesamtwert jeder Folgekonstellation höchstens so groß wie der Gesamtwert der Startkonstellation.
- Der Gesamtwert der Startkonstellation ist höchstens

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} < \frac{1}{1 - x} = \frac{1}{x^2} = x^{-2}.$$

Dabei ist N eine „rechte“ Schranke für die belegten Felder.

Eindimensionale Invasion

Beobachtung:

- Der Gesamtwert der belegten Felder wird in keinem Zug größer.
- Insbesondere ist der Gesamtwert jeder Folgekonstellation höchstens so groß wie der Gesamtwert der Startkonstellation.
- Der Gesamtwert der Startkonstellation ist höchstens

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} < \frac{1}{1 - x} = \frac{1}{x^2} = x^{-2}.$$

  Dabei ist N eine „rechte“ Schranke für die belegten Felder.
- Aber der Gesamtwert jeder Konstellation, die einen Agenten enthält, der mindestens *zwei* Felder ins Landesinnere vorgedrungen ist, ist mindestens x^{-2}.

Eindimensionale Invasion

Beobachtung:

- Der Gesamtwert der belegten Felder wird in keinem Zug größer.
- Insbesondere ist der Gesamtwert jeder Folgekonstellation höchstens so groß wie der Gesamtwert der Startkonstellation.
- Der Gesamtwert der Startkonstellation ist höchstens

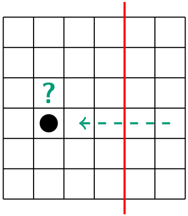
  $$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} < \frac{1}{1 - x} = \frac{1}{x^2} = x^{-2}.$$

  Dabei ist N eine „rechte" Schranke für die belegten Felder.
- Aber der Gesamtwert jeder Konstellation, die einen Agenten enthält, der mindestens *zwei* Felder ins Landesinnere vorgedrungen ist, ist mindestens x^{-2}.
- Also können die Agenten höchstens ein Feld ins Land vordringen.

Zweidimensionale Invasion

Problem

Wie weit kann eine Gruppe von Agenten auf einem zweidimensionalen Spielbrett in das Innere eines Landes vordringen?

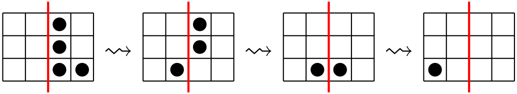


Zweidimensionale Invasion

Problem

Wie weit kann eine Gruppe von Agenten auf einem zweidimensionalen Spielbrett in das Innere eines Landes vordringen?

- Entfernung 2 von der Grenze ist möglich:

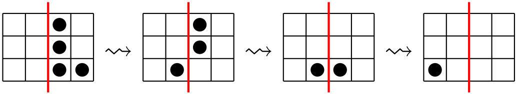


Zweidimensionale Invasion

Problem

Wie weit kann eine Gruppe von Agenten auf einem zweidimensionalen Spielbrett in das Innere eines Landes vordringen?

- Entfernung 2 von der Grenze ist möglich:



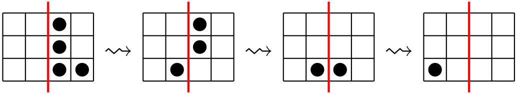
- Entfernung 3 von der Grenze ist möglich ...

Zweidimensionale Invasion

Problem

Wie weit kann eine Gruppe von Agenten auf einem zweidimensionalen Spielbrett in das Innere eines Landes vordringen?

- Entfernung 2 von der Grenze ist möglich:



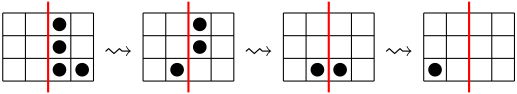
- Entfernung 3 von der Grenze ist möglich ...
- Entfernung 4 von der Grenze ist möglich ...

Zweidimensionale Invasion

Problem

Wie weit kann eine Gruppe von Agenten auf einem zweidimensionalen Spielbrett in das Innere eines Landes vordringen?

- Entfernung 2 von der Grenze ist möglich:



- Entfernung 3 von der Grenze ist möglich . . .
- Entfernung 4 von der Grenze ist möglich . . .
- Was ist mit Entfernung 5?

Zweidimensionale Invasion

Idee

Wir gehen so ähnlich wie im eindimensionalen Fall vor.

Zweidimensionale Invasion

Idee

Wir gehen so ähnlich wie im eindimensionalen Fall vor.

Angenommen, die Agenten können ein gewisses Feld F innerhalb des Landes erreichen, das mindestens fünf Schritte von der Grenze entfernt ist. Dann betrachten wir zu F die Taxi-Bewertung:

	x^3				
x^1	x^2	x^3			
F	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5
x^1	x^2	x^3			
	x^3				

wobei wieder $x = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1}{\varphi}$ bzw. $x^2 + x = 1$ist.

Zweidimensionale Invasion

Beobachtung:

- Der Gesamtwert der belegten Felder wird in keinem Zug größer.
  (Analog zum eindimensionalen Fall)

Zweidimensionale Invasion

Beobachtung:

- Der Gesamtwert der belegten Felder wird in keinem Zug größer. (Analog zum eindimensionalen Fall)
- Insbesondere ist der Gesamtwert jeder Folgekonstellation höchstens so groß wie der Gesamtwert der Startkonstellation.

Zweidimensionale Invasion

Beobachtung:

- Der Gesamtwert der belegten Felder wird in keinem Zug größer. (Analog zum eindimensionalen Fall)
- Insbesondere ist der Gesamtwert jeder Folgekonstellation höchstens so groß wie der Gesamtwert der Startkonstellation.
- Der Gesamtwert der Startkonstellation ist kleiner als

  $x^5 \cdot (1 + 3 \cdot x + 5 \cdot x^2 + 7 \cdot x^3 + \dots)$

Zweidimensionale Invasion

Beobachtung:

- Der Gesamtwert der belegten Felder wird in keinem Zug größer. (Analog zum eindimensionalen Fall)
- Insbesondere ist der Gesamtwert jeder Folgekonstellation höchstens so groß wie der Gesamtwert der Startkonstellation.
- Der Gesamtwert der Startkonstellation ist kleiner als

  $x^5 \cdot (1 + 3 \cdot x + 5 \cdot x^2 + 7 \cdot x^3 + \dots) = \cdots \textit{Analysis} \cdots$

Zweidimensionale Invasion

Beobachtung:

- Der Gesamtwert der belegten Felder wird in keinem Zug größer. (Analog zum eindimensionalen Fall)
- Insbesondere ist der Gesamtwert jeder Folgekonstellation höchstens so groß wie der Gesamtwert der Startkonstellation.
- Der Gesamtwert der Startkonstellation ist kleiner als

$$\begin{aligned} x^5 \cdot (1 + 3 \cdot x + 5 \cdot x^2 + 7 \cdot x^3 + \dots) &= \cdots \mathit{Analysis} \cdots \\ &= x^5 \cdot \tfrac{1+x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Zweidimensionale Invasion

Beobachtung:

- Der Gesamtwert der belegten Felder wird in keinem Zug größer. (Analog zum eindimensionalen Fall)
- Insbesondere ist der Gesamtwert jeder Folgekonstellation höchstens so groß wie der Gesamtwert der Startkonstellation.
- Der Gesamtwert der Startkonstellation ist kleiner als

$$\begin{aligned} x^5 \cdot (1 + 3 \cdot x + 5 \cdot x^2 + 7 \cdot x^3 + \dots) &= \cdots \textit{Analysis} \cdots \\ &= x^5 \cdot \frac{1+x}{(1-x)^2} = x^5 \cdot \frac{\frac{1}{x}}{x^4} \end{aligned}$$

Zweidimensionale Invasion

Beobachtung:

- Der Gesamtwert der belegten Felder wird in keinem Zug größer. (Analog zum eindimensionalen Fall)
- Insbesondere ist der Gesamtwert jeder Folgekonstellation höchstens so groß wie der Gesamtwert der Startkonstellation.
- Der Gesamtwert der Startkonstellation ist kleiner als

$$\begin{aligned} x^5 \cdot (1 + 3 \cdot x + 5 \cdot x^2 + 7 \cdot x^3 + \dots) &= \cdots \mathit{Analysis} \cdots \\ &= x^5 \cdot \tfrac{1+x}{(1-x)^2} = x^5 \cdot \tfrac{\frac{1}{x}}{x^4} = x^0. \end{aligned}$$

Zweidimensionale Invasion

Beobachtung:

- Der Gesamtwert der belegten Felder wird in keinem Zug größer. (Analog zum eindimensionalen Fall)
- Insbesondere ist der Gesamtwert jeder Folgekonstellation höchstens so groß wie der Gesamtwert der Startkonstellation.
- Der Gesamtwert der Startkonstellation ist kleiner als

$$x^5 \cdot (1 + 3 \cdot x + 5 \cdot x^2 + 7 \cdot x^3 + \dots) = \cdots \textit{Analysis} \cdots = x^5 \cdot \frac{1+x}{(1-x)^2} = x^5 \cdot \frac{\frac{1}{x}}{x^4} = x^0.$$

- Aber der Gesamtwert jeder Konstellation, die einen Agenten auf dem Feld F enthält, ist mindestens x^0.

Zweidimensionale Invasion

Beobachtung:

- Der Gesamtwert der belegten Felder wird in keinem Zug größer. (Analog zum eindimensionalen Fall)
- Insbesondere ist der Gesamtwert jeder Folgekonstellation höchstens so groß wie der Gesamtwert der Startkonstellation.
- Der Gesamtwert der Startkonstellation ist kleiner als

$$x^5 \cdot (1 + 3 \cdot x + 5 \cdot x^2 + 7 \cdot x^3 + \dots) = \cdots \mathit{Analysis} \cdots$$
$$= x^5 \cdot \frac{1+x}{(1-x)^2} = x^5 \cdot \frac{\frac{1}{x}}{x^4} = x^0.$$

- Aber der Gesamtwert jeder Konstellation, die einen Agenten auf dem Feld F enthält, ist mindestens x^0.
- Also können die Agenten höchstens vier Felder ins Land vordringen.

Ausblick: Analysis

In den obigen Problemen konnten wir den Gesamtwert der Startkonstellation durch die „unendlichen Summen“

- $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$
- $1 + 3 \cdot x + 5 \cdot x^2 + 7 \cdot x^3 + \cdots$

abschätzen.

Ausblick: Analysis

In den obigen Problemen konnten wir den Gesamtwert der Startkonstellation durch die „unendlichen Summen“

- $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$
- $1 + 3 \cdot x + 5 \cdot x^2 + 7 \cdot x^3 + \cdots$

abschätzen.

In der Analysis wird genau untersucht, unter welchen Bedingungen solche unendlichen Summen (sogenannte Reihen) tatsächlich sinnvolle mathematische Objekte sind, und wie man ihre Werte berechnen kann.

Ausblick: Analysis

Problem

Wie kann man den Wert der unendlichen Summe

$$S := 1 + 3 \cdot x + 5 \cdot x^2 + 7 \cdot x^3 + \cdots$$

berechnen, wenn man bereits weiß, dass es sich hierbei um eine vernünftige unendliche Summe handelt, und dass

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1 - x}$$

ist?

Aus der Definition erhalten wir durch Umformen nacheinander

- $x \cdot S = x + 3 \cdot x^2 + 5 \cdot x^3 + \cdots$ bzw.

Ausblick: Analysis

Problem

Wie kann man den Wert der unendlichen Summe

$$S := 1 + 3 \cdot x + 5 \cdot x^2 + 7 \cdot x^3 + \cdots$$

berechnen, wenn man bereits weiß, dass es sich hierbei um eine vernünftige unendliche Summe handelt, und dass

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1 - x}$$

ist?

Aus der Definition erhalten wir durch Umformen nacheinander

- $x \cdot S = x + 3 \cdot x^2 + 5 \cdot x^3 + \cdots$ bzw.
- $S - x \cdot S = 1 + 2 \cdot x + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3 + \cdots = 1 + 2 \cdot x \cdot (1 + x + x^2 + \cdots)$

Ausblick: Analysis

Problem

Wie kann man den Wert der unendlichen Summe

$$S := 1 + 3 \cdot x + 5 \cdot x^2 + 7 \cdot x^3 + \cdots$$

berechnen, wenn man bereits weiß, dass es sich hierbei um eine vernünftige unendliche Summe handelt, und dass

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

ist?

Aus der Definition erhalten wir durch Umformen nacheinander

- $x \cdot S = x + 3 \cdot x^2 + 5 \cdot x^3 + \cdots$ bzw.
- $S - x \cdot S = 1 + 2 \cdot x + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3 + \cdots = 1 + 2 \cdot x \cdot (1 + x + x^2 + \cdots)$
  $= 1 + \frac{2x}{1-x} = \frac{1+x}{1-x}$,

Ausblick: Analysis

Problem

Wie kann man den Wert der unendlichen Summe

$$S := 1 + 3 \cdot x + 5 \cdot x^2 + 7 \cdot x^3 + \cdots$$

berechnen, wenn man bereits weiß, dass es sich hierbei um eine vernünftige unendliche Summe handelt, und dass

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

ist?

Aus der Definition erhalten wir durch Umformen nacheinander

- $x \cdot S = x + 3 \cdot x^2 + 5 \cdot x^3 + \cdots$ bzw.
- $$\begin{aligned} S - x \cdot S &= 1 + 2 \cdot x + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3 + \cdots = 1 + 2 \cdot x \cdot (1 + x + x^2 + \cdots) \\ &= 1 + \tfrac{2x}{1-x} = \tfrac{1+x}{1-x}, \end{aligned}$$

und damit $S = \frac{1+x}{(1-x)^2}$.

Literatur

- http://en.wikipedia.org/wiki/Peg_solitaire
- http://www.cut-the-knot.org/proofs/PegsAndGroups.shtml
- http://www.cs.cmu.edu/˜stefann/papers/math_reports