Wie druckt man eine Mannigfaltigkeit? Über die Topologie des 3D-Drucks

MNU-Landestagung. 02/2016. Regensburg

Clara Löh

Fakultät für Mathematik. Universität Regensburg

Universität Regensburg

Überblick

Ziele

- Verständnis des Grundprinzip des 3D-Drucks
- Verständnis der topologischen Grundlagen dafür

Überblick

Ziele

- Verständnis des Grundprinzip des 3D-Drucks
- Verständnis der topologischen Grundlagen dafür

Wie druckt man dreidimensionale Objekte?

Welche mathematischen Objekte druckt ein 3D-Drucker?

Kann man jede STL-Datei drucken?

Kann man jede Mannigfaltigkeit drucken?

Zusammenfassung

Das Grundprinzip des 3D-Drucks

Das Grundprinzip des 3D-Drucks

Dreidimensionale Objekte werden gedruckt, indem man

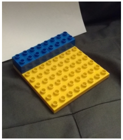
- Schicht
- für Schicht
- für Schicht
- für Schicht
- für Schicht
- ...

Material aufträgt.

Grundprinzip des 3D-Drucks, von Hand

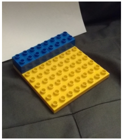
Grundprinzip des 3D-Drucks, von Hand

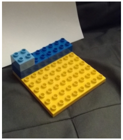
$\longrightarrow$



Grundprinzip des 3D-Drucks, von Hand

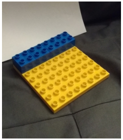
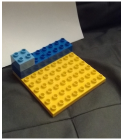
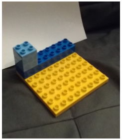
$\longrightarrow$





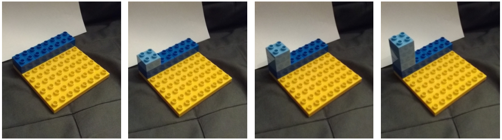
Grundprinzip des 3D-Drucks, von Hand

$\longrightarrow$

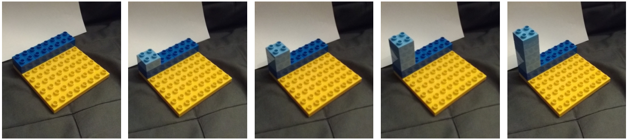
Grundprinzip des 3D-Drucks, von Hand

$\longrightarrow$



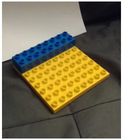
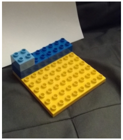
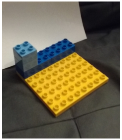
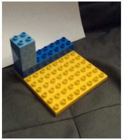
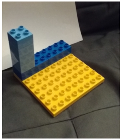
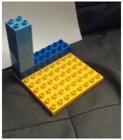
Grundprinzip des 3D-Drucks, von Hand

$\longrightarrow$



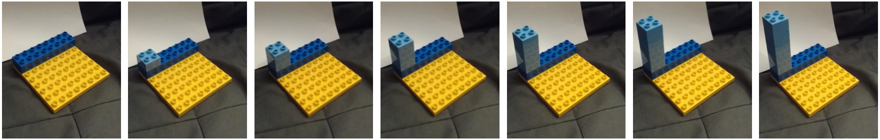
Grundprinzip des 3D-Drucks, von Hand

$\longrightarrow$

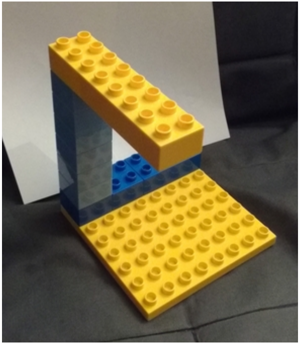
Grundprinzip des 3D-Drucks, von Hand

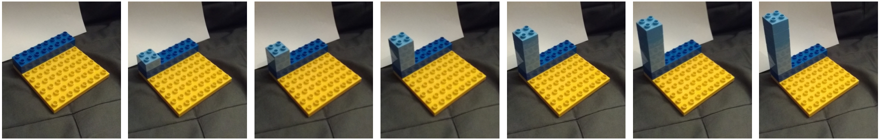
$\longrightarrow$



Grundprinzip des 3D-Drucks, von Hand

$\longrightarrow$





Umsetzungen dieses Grundprinzips

- Stereolithographie
  UV-Laser härtet schichtweise Polymerharz

STL
Form 1+ (Formlabs)

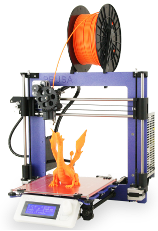
Umsetzungen dieses Grundprinzips

- Stereolithographie
  UV-Laser härtet schichtweise Polymerharz
- Fused Deposition Modeling (Stratasys)

= Fused Filament Fabrication (Reprap-Projekt)
  geschmolzenes Material wird schichtweise aufgetragen

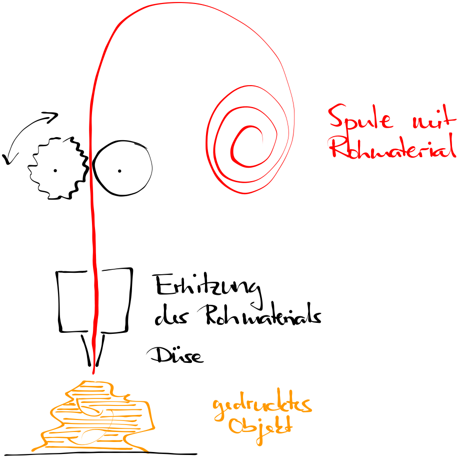
- ...

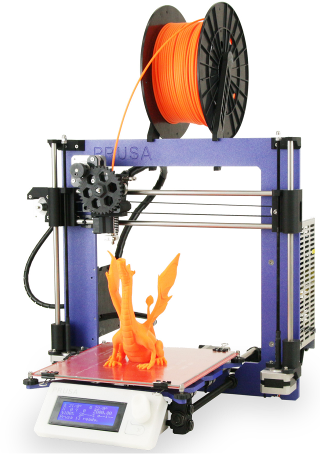
STL
Form 1+ (Formlabs)



FFF
Prusa i3 (Reprap)

Fused Filament Fabrication





Anwendungen des 3D-Drucks

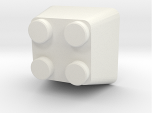
- Schnelle Konstruktion von Prototypen
- Herstellung von Einzelstücken/Ersatzteilen

Anwendungen des 3D-Drucks

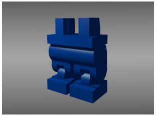
- Schnelle Konstruktion von Prototypen
- Herstellung von Einzelstücken/Ersatzteilen
- ... und vielen weiteren nützlichen Gegenständen:

Anwendungen des 3D-Drucks

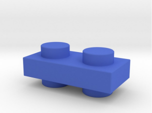
- Schnelle Konstruktion von Prototypen
- Herstellung von Einzelstücken/Ersatzteilen
- … und vielen weiteren nützlichen Gegenständen:



Tasker @Shapeways



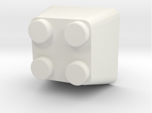
JohnStudios @Shapeways



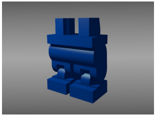
rpeschetz @Shapeways

Anwendungen des 3D-Drucks

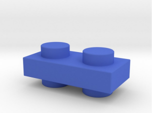
- Schnelle Konstruktion von Prototypen
- Herstellung von Einzelstücken/Ersatzteilen
- . . . und vielen weiteren nützlichen Gegenständen:



Tasker @Shapeways



JohnStudios @Shapeways

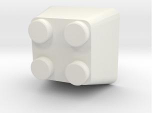


rpeschetz @Shapeways

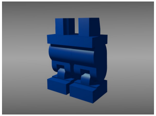
- Anschauungsmaterial für den Mathematik-Unterricht:

Anwendungen des 3D-Drucks

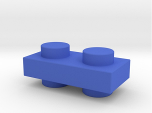
- Schnelle Konstruktion von Prototypen
- Herstellung von Einzelstücken/Ersatzteilen
- . . . und vielen weiteren nützlichen Gegenständen:



Tasker @Shapeways



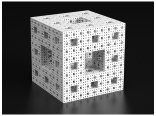
JohnStudios @Shapeways



rpeschetz @Shapeways

- Anschauungsmaterial für den Mathematik-Unterricht:

Bathsheba @Shapeways



Bathsheba @Shapeways

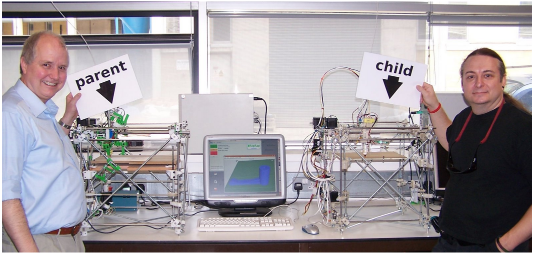
Drucker, die Drucker drucken

3D-Drucker bestehen aus Einzelteilen, von denen die meisten von einem 3D-Drucker gedruckt werden können ...

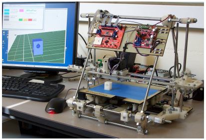
Drucker, die Drucker drucken

3D-Drucker bestehen aus Einzelteilen, von denen die meisten von einem 3D-Drucker gedruckt werden können ...

- Das Reprap-Projekt (http://reprap.org)

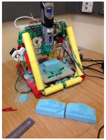


- Auswahl von Druckern im Reprap-Projekt:



Mendel

Prusa i3



Holliger

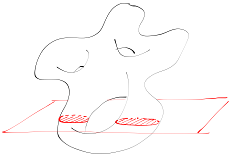
Überblick

Welche mathematischen Objekte druckt ein 3D-Drucker?

- Erinnerung: Wir drucken die Schnittflächen Schicht für Schicht

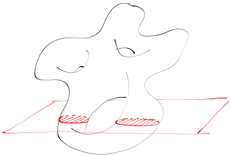
Welche mathematischen Objekte druckt ein 3D-Drucker?

- Erinnerung: Wir drucken die Schnittflächen Schicht für Schicht
- Es genügt also, die Oberfläche des Objekts zu spezifizieren, und die Schnittflächen/Schnittlinien in der gewünschten Druckauflösung daraus zu berechnen.



Welche mathematischen Objekte druckt ein 3D-Drucker?

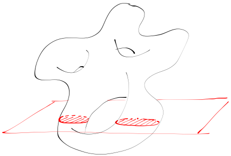
- Erinnerung: Wir drucken die Schnittflächen Schicht für Schicht
- Es genügt also, die Oberfläche des Objekts zu spezifizieren, und die Schnittflächen/Schnittlinien in der gewünschten Druckauflösung daraus zu berechnen.



- Diese Oberflächen sind zweidimensionale Mannigfaltigkeiten, die in $\mathbb{R}^3$ eingebettet sind.

Welche mathematischen Objekte druckt ein 3D-Drucker?

- Erinnerung: Wir drucken die Schnittflächen Schicht für Schicht
- Es genügt also, die Oberfläche des Objekts zu spezifizieren, und die Schnittflächen/Schnittlinien in der gewünschten Druckauflösung daraus zu berechnen.



- Diese Oberflächen sind zweidimensionale Mannigfaltigkeiten, die in $\mathbb{R}^3$ eingebettet sind.

Fragen

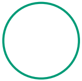
- Was sind Mannigfaltigkeiten?
- Wie kann man Mannigfaltigkeiten geeignet spezifizieren?

Mannigfaltigkeiten und ihre Ränder

Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine *n-Mannigfaltigkeit* ist ein topologischer Raum, der lokal wie $\mathbb{R}^n$ aussieht und hausdorffsch ist und das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

Modellfall


Beispiel


Nicht-Beispiel

Mannigfaltigkeiten und ihre Ränder

Definition

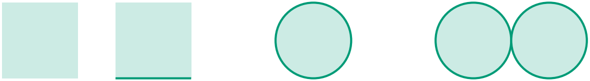
Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine n-Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum, der lokal wie $\mathbb{R}^n$ aussieht und hausdorffsch ist und das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

Modellfall Beispiel Nicht-Beispiel

Definition

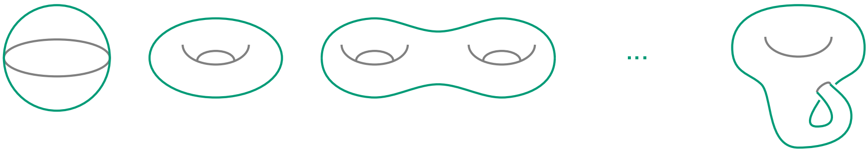
Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine n-Mannigfaltigkeit mit Rand ist ein topologischer Raum, der lokal wie $\mathbb{R}^n$ oder $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ aussieht

und hausdorffsch ist und das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

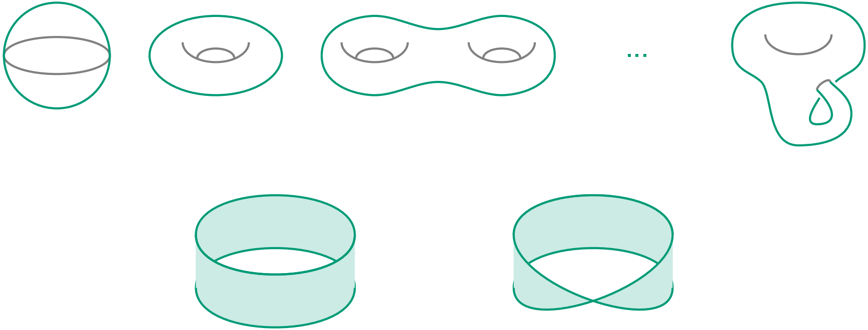


Modellfälle Beispiel Nicht-Beispiel

Beispielmannigfaltigkeiten



Beispielmannigfaltigkeiten



Diskrete Darstellung von Mannigfaltigkeiten?

Wir suchen

- eine diskrete Beschreibung von Mannigfaltigkeiten,
- die für Berechnungen geeignet ist

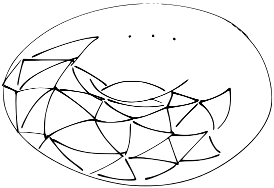
Diskrete Darstellung von Mannigfaltigkeiten?

Wir suchen

- eine diskrete Beschreibung von Mannigfaltigkeiten,
- die für Berechnungen geeignet ist

Idee

- Lineare Approximation von Mannigfaltigkeiten
  durch Punkte, Strecken, Dreiecke, Simplizes, ...
- Berechnung der Schnitte durch lineare Algebra



Triangulierungen von Mannigfaltigkeiten

Definition

Seien $n, N \in \mathbb{N}$. Eine triangulierte n-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$ ist eine endliche Menge S von n-Simplizes in $\mathbb{R}^N$ mit folgenden Eigenschaften:

Triangulierungen von Mannigfaltigkeiten

Definition

Seien $n, N \in \mathbb{N}$. Eine triangulierte n-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$ ist eine endliche Menge S von n-Simplizes in $\mathbb{R}^N$ mit folgenden Eigenschaften:

- Sind $s, t \in S$, so ist der Durchschnitt $s \cap t$ leer oder eine Seite von s und t.

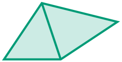
erlaubt erlaubt nicht erlaubt nicht erlaubt

Triangulierungen von Mannigfaltigkeiten

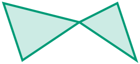
Definition

Seien $n, N \in \mathbb{N}$. Eine triangulierte n-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$ ist eine endliche Menge S von n-Simplizes in $\mathbb{R}^N$ mit folgenden Eigenschaften:

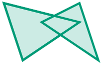
- Sind $s, t \in S$, so ist der Durchschnitt $s \cap t$ leer oder eine Seite von s und t.



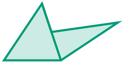
erlaubt



erlaubt



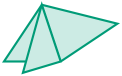
nicht erlaubt



nicht erlaubt

- Die Vereinigung $\bigcup S$ ist eine n-Mannigfaltigkeit.

erlaubt



nicht erlaubt

Triangulierungen von Mannigfaltigkeiten

Definition

Seien $n, N \in \mathbb{N}$. Eine triangulierte n-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$ ist eine endliche Menge S von n-Simplizes in $\mathbb{R}^N$ mit folgenden Eigenschaften:

- Sind $s, t \in S$, so ist der Durchschnitt $s \cap t$ leer oder eine Seite von s und t.

erlaubt — erlaubt — nicht erlaubt — nicht erlaubt

- Die Vereinigung $\bigcup S$ ist eine n-Mannigfaltigkeit.

erlaubt — nicht erlaubt

Eine Triangulierung einer n-Mannigfaltigkeit M ist eine triangulierte n-Untermannigfaltigkeit S, für die $\bigcup S$ zu M homöomorph ist.

(Ein mögliches Gütekriterium für eine Triangulierung einer eingebetteten Mannigfaltigkeit ist, dass der Abstand zur gegebenen Mannigfaltigkeit klein ist.)

Das STL-Format

ASCII STL ist ein Dateiformat, das es erlaubt, triangulierte Flächen in $\mathbb{R}^3$ zu spezifizieren:

Das STL-Format

ASCII STL ist ein Dateiformat, das es erlaubt, triangulierte Flächen in $\mathbb{R}^3$ zu spezifizieren:

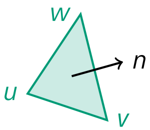
- solid *name*

Das STL-Format

ASCII STL ist ein Dateiformat, das es erlaubt, triangulierte Flächen in $\mathbb{R}^3$ zu spezifizieren:

- solid *name*
- Es folgt die Liste der Dreiecke der Triangulierung,
  wobei jedes Dreieck wie folgt definiert ist:

facet normal $n_1\ n_2\ n_3$ — äußerer Einheitsnormalenvektor
    outer loop
        vertex $u_1\ u_2\ u_3$ — erster Eckpunkt des Dreiecks
        vertex $v_1\ v_2\ v_3$ — zweiter Eckpunkt des Dreiecks
        vertex $w_1\ w_2\ w_3$ — dritter Eckpunkt des Dreiecks
    endloop
endfacet



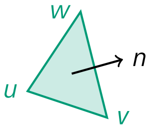
Zusätzlich wird verlangt, dass die Orientierung des Dreiecks mit der Richtung des Normalenvektors kompatibel ist; daher ist die Angabe von facet normal redundant.

Das STL-Format

ASCII STL ist ein Dateiformat, das es erlaubt, triangulierte Flächen in $\mathbb{R}^3$ zu spezifizieren:

- solid *name*
- Es folgt die Liste der Dreiecke der Triangulierung, wobei jedes Dreieck wie folgt definiert ist:

facet normal n_1 n_2 n_3	äußerer Einheitsnormalenvektor
outer loop	
vertex u_1 u_2 u_3	erster Eckpunkt des Dreiecks
vertex v_1 v_2 v_3	zweiter Eckpunkt des Dreiecks
vertex w_1 w_2 w_3	dritter Eckpunkt des Dreiecks
endloop	
endfacet	



  Zusätzlich wird verlangt, dass die Orientierung des Dreiecks mit der Richtung des Normalenvektors kompatibel ist; daher ist die Angabe von facet normal redundant.

- endsolid *name*

Darauf aufbauende Fragen

- Kann man jede STL-Datei drucken?
- Kann man jede Mannigfaltigkeit drucken?

Überblick

Welche STL-Dateien geben “sinnvolle” dreidimensionale Objekte?

D.h. welche Listen von Dreiecken in $\mathbb{R}^3$ bilden den Rand einer kompakten dreidimensionalen Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$?

Welche STL-Dateien geben “sinnvolle” dreidimensionale Objekte?

D.h. welche Listen von Dreiecken in $\mathbb{R}^3$ bilden den Rand einer kompakten dreidimensionalen Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$?

- topologische/geometrische Einschränkungen
  die Vereinigung der Dreiecke ist eine 2-Mannigfaltigkeit ohne Rand, und es dürfen keine Selbstdurchdringungen vorliegen (d.h. die Schnittbedingung für Dreiecke muss erfüllt sein)

Topologische Tatsache: Jede 2-Mannigfaltigkeit ohne Rand,
die in $\mathbb{R}^3$ eingebettet ist,
ist Rand einer kompakten in $\mathbb{R}^3$ eingebetteten 3-Mannigfaltigkeit.

Welche STL-Dateien geben “sinnvolle” dreidimensionale Objekte?

D.h. welche Listen von Dreiecken in $\mathbb{R}^3$ bilden den Rand einer kompakten dreidimensionalen Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$?

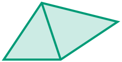
- topologische/geometrische Einschränkungen
  die Vereinigung der Dreiecke ist eine 2-Mannigfaltigkeit ohne Rand, und es dürfen keine Selbstdurchdringungen vorliegen
  (d.h. die Schnittbedingung für Dreiecke muss erfüllt sein)
- praktische Einschränkungen
  keine losen Komponenten im inneren der äußersten Oberfläche, genug intrinsische Stabilität

Topologische Tatsache: Jede 2-Mannigfaltigkeit ohne Rand,
die in $\mathbb{R}^3$ eingebettet ist,
ist Rand einer kompakten in $\mathbb{R}^3$ eingebetteten 3-Mannigfaltigkeit.

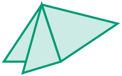
Topologische/geometrische Einschränkungen

Es genügt, folgendes nachzuweisen:

- Jede Kante eines Dreiecks der Liste ist Kante von genau zwei Dreiecken der Liste.



erlaubt



nicht erlaubt

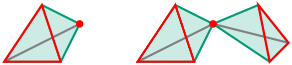
Topologische/geometrische Einschränkungen

Es genügt, folgendes nachzuweisen:

- Jede Kante eines Dreiecks der Liste ist Kante von genau zwei Dreiecken der Liste.

erlaubt nicht erlaubt

- Jede Ecke v eines Dreiecks der Liste erfüllt:
  die gegenüberliegenden Kanten formen einen Polygonkreis.



erlaubt nicht erlaubt

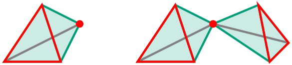
Topologische/geometrische Einschränkungen

Es genügt, folgendes nachzuweisen:

- Jede Kante eines Dreiecks der Liste ist Kante von genau zwei Dreiecken der Liste.

erlaubt nicht erlaubt

- Jede Ecke v eines Dreiecks der Liste erfüllt:
die gegenüberliegenden Kanten formen einen Polygonkreis.



erlaubt nicht erlaubt

- Zur Überprüfung der Schnittbedingung sind alle Schnitte von je zwei Dreiecken zu berechnen.

Topologische Trickiste

Fragen

- Gegeben sei eine STL-Datei, die druckbar ist.
  Wieviele Henkel hat das resultierende dreidimensionale Objekt?
- Kann man einen Torus drucken, bei dem an jeder Ecke
  genau 2016 Dreiecke zusammentreffen?

Topologische Trickkiste

Fragen

- Gegeben sei eine STL-Datei, die druckbar ist.
  Wieviele Henkel hat das resultierende dreidimensionale Objekt?
- Kann man einen Torus drucken, bei dem an jeder Ecke genau 2016 Dreiecke zusammentreffen?

Beide Fragen lassen sich mithilfe der Klassifikation von Flächen beantworten:

Satz

Es gibt bis auf Homöomorphie *nur die folgenden kompakten orientierbaren zusammenhängenden 2-Mannigfaltigkeiten ohne Rand:*

Die Euler-Charakteristik

Definition

Es sei eine triangulierte 2-Untermannigfaltigkeit S gegeben.
Die Euler-Charakteristik von S ist definiert als

$$\chi(S) := \#\text{Ecken in} \bigcup S - \#\text{Kanten in} \bigcup S + \#\text{Dreiecke in} \bigcup S$$

Die Euler-Charakteristik

Definition

Es sei eine triangulierte 2-Untermannigfaltigkeit S gegeben.
Die Euler-Charakteristik von S ist definiert als

$$\chi(S) := \#\text{Ecken in} \bigcup S - \#\text{Kanten in} \bigcup S + \#\text{Dreiecke in} \bigcup S$$

Satz

Ist S eine triangulierte, zusammenhängende 2-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$, so ist $\bigcup S$ eine kompakte orientierbare 2-Mannigfaltigkeit ohne Rand mit genau

$$1 - \frac{1}{2} \cdot \chi(S)$$

Henkeln. Insbesondere hängt die Euler-Charakteristik nicht von der gewählten Triangulierung ab(!).

Überblick

Wie druckt man dreidimensionale Objekte?

Welche mathematischen Objekte druckt ein 3D-Drucker?

Kann man jede STL-Datei drucken?

Kann man jede Mannigfaltigkeit drucken?

Zusammenfassung

Kann man jede Fläche drucken?

Genauer: Kann jede geschlossene orientierte Fläche gedruckt werden?

Kann man jede Fläche drucken?

Genauer: Kann jede geschlossene orientierte Fläche gedruckt werden?

Erinnerung: Klassifikation solcher Flächen (bis auf Homöomorphie):

Kann man jede Fläche drucken?

Genauer: Kann jede geschlossene orientierte Fläche gedruckt werden?
Erinnerung: Klassifikation solcher Flächen (bis auf Homöomorphie):

- Kann jede solche Fläche in $\mathbb{R}^3$ eingebettet werden?
- Kann jede solche Fläche trianguliert werden?
- Kann jede solche Fläche gefüllt werden?
  D.h. ist jede solche Fläche der Rand einer kompakten dreidimensionalen Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$?

Kann man jede Fläche drucken?

Genauer: Kann jede geschlossene orientierte Fläche gedruckt werden?
Erinnerung: Klassifikation solcher Flächen (bis auf Homöomorphie):

...

- Kann jede solche Fläche in $\mathbb{R}^3$ eingebettet werden?

  Ja!

- Kann jede solche Fläche trianguliert werden?

  Ja! (Radó)

- Kann jede solche Fläche gefüllt werden?
  D.h. ist jede solche Fläche der Rand einer kompakten dreidimensionalen Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$?

  Ja!

Kann man jede Mannigfaltigkeit drucken?

Genauer: Kann jede geschlossene orientierte Mannigfaltigkeit gedruckt werden? (falls höherdimensionale Drucker zur Verfügung stehen)

Kann man jede Mannigfaltigkeit drucken?

Genauer: Kann jede geschlossene orientierte Mannigfaltigkeit gedruckt werden? (falls höherdimensionale Drucker zur Verfügung stehen)

- Kann jede solche Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^?$ eingebettet werden?
- Kann jede solche Mannigfaltigkeit trianguliert werden?
- Kann jede solche Mannigfaltigkeit gefüllt werden?
  D.h. ist jede solche Fläche der Rand einer kompakten höherdimensionalen Mannigfaltigkeit?

Kann man jede Mannigfaltigkeit drucken?

Genauer: Kann jede geschlossene orientierte Mannigfaltigkeit gedruckt werden? (falls höherdimensionale Drucker zur Verfügung stehen)

- Kann jede solche Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^?$ eingebettet werden?
- Kann jede solche Mannigfaltigkeit trianguliert werden?
- Kann jede solche Mannigfaltigkeit gefüllt werden?
  D.h. ist jede solche Fläche der Rand einer kompakten höherdimensionalen Mannigfaltigkeit?

Klassifikation solcher Mannigfaltigkeiten (bis auf Homöomorphie):

?!

Einbettbarkeit von Mannigfaltigkeiten

- Kann jede kompakte Mannigfaltigkeit in einen euklidischen Raum eingebettet werden?

Einbettbarkeit von Mannigfaltigkeiten

- Kann jede kompakte Mannigfaltigkeit in einen euklidischen Raum eingebettet werden?

  Ja!

Einbettbarkeit von Mannigfaltigkeiten

- Kann jede kompakte Mannigfaltigkeit in einen euklidischen Raum eingebettet werden?

  Ja!

- Kann jede kompakte n-Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{n+1}$ eingebettet werden?

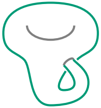
Einbettbarkeit von Mannigfaltigkeiten

- Kann jede kompakte Mannigfaltigkeit in einen euklidischen Raum eingebettet werden?

  Ja!

- Kann jede kompakte n-Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{n+1}$ eingebettet werden?

  Nein!



Triangulierbarkeit von Mannigfaltigkeiten

- Existenz: Kann jede Mannigfaltigkeit trianguliert werden?

Triangulierbarkeit von Mannigfaltigkeiten

- Existenz: Kann jede Mannigfaltigkeit trianguliert werden?

  Nein! (Freedman)

  Für glatte Mannigfaltigkeiten: Ja!

Triangulierbarkeit von Mannigfaltigkeiten

- Existenz: Kann jede Mannigfaltigkeit trianguliert werden?

  Nein! (Freedman)
  Für glatte Mannigfaltigkeiten: Ja!
- Eindeutigkeit: Besitzen je zwei Triangulierungen eine gemeinsame Verfeinerung?

Triangulierbarkeit von Mannigfaltigkeiten

- Existenz: Kann jede Mannigfaltigkeit trianguliert werden?

  Nein! (Freedman)
  Für glatte Mannigfaltigkeiten: Ja!

- Eindeutigkeit: Besitzen je zwei Triangulierungen eine gemeinsame Verfeinerung?

  Nein! (Widerlegung der sogenannten Hauptvermutung; Gegenbeispiel von Donaldson)

Füllbarkeit von Mannigfaltigkeiten

- Kann jede Mannigfaltigkeit gefüllt werden?
  D.h. gibt es zu jeder kompakten n-Mannigfaltigkeit M ohne Rand eine kompakte $n+1$-Mannigfaltigkeit W mit $\partial W = M$?

Füllbarkeit von Mannigfaltigkeiten

- Kann jede Mannigfaltigkeit gefüllt werden?
  D.h. gibt es zu jeder kompakten n-Mannigfaltigkeit M ohne Rand eine kompakte $n + 1$-Mannigfaltigkeit W mit $\partial W = M$?

  Nein!

Füllbarkeit von Mannigfaltigkeiten

- Kann jede Mannigfaltigkeit gefüllt werden?
  D.h. gibt es zu jeder kompakten n-Mannigfaltigkeit M ohne Rand eine kompakte $n+1$-Mannigfaltigkeit W mit $\partial W = M$?

  Nein!

- Diese Fragestellung führt zum Begriff des Bordismus,
  der wichtige Entwicklungen in der

  geometrischen Topologie,
  Homotopietheorie, und der
  algebraischen Geometrie

  angestoßen hat.

Zusammenfassung

- Dreidimensionale Objekte werden Schicht für Schicht gedruckt
- Man modelliert dreidimensionale Objekte durch ihre zweidimensionale Oberfläche (bzw. eine feine Triangulierung davon)
- Nicht jede STL-Datei kann gedruckt werden
- Nicht jede Mannigfaltigkeit kann auf diese Weise gedruckt werden, selbst wenn hochdimensionale Drucker zur Verfügung stehen

Werbung!

- Schülerzirkel Mathematik der Fakultät für Mathematik der Universität Regensburg:
  http://www.mathematik.uni-r.de/schuelerzirkel
- Nächster Workshop: voraussichtlich im Mai 2016.
- Der Schülerzirkel in Buchform: Quod erat knobelandum
  C. Löh, S. Krauss, N. Kilbertus (Hrsg.)
  Springer Spektrum, erscheint 2016 (morgen?!).