Mannigfaltigkeiten halten nicht

Clara Strohm
strohm@math.uni-muenster.de
http://omega.sdf-eu.org/dectop/

29. Januar 2003

Auch die Topologie bleibt nicht von den klassischen Resultaten der Berechenbarkeits- und Entscheidbarkeitstheorie verschont:

Satz. *Sei $n \in \mathbf{N}_{\geq 4}$. Dann ist das Homöomorphieproblem für n-dimensionale Mannigfaltigkeiten nicht entscheidbar.*

Analoge Sätze gelten auch für die entsprechenden Probleme, wenn man Homöomorphie durch Homotopie, kombinatorische Äquivalenz, oder Diffeomorphie ersetzt.
Um diesen Satz zu beweisen, müssen zuerst die Begriffe aus der Rekursionstheorie geklärt werden – dies geschieht im ersten Abschnitt. Im zweiten Abschnitt werden wir dann das Isomorphie- bzw. das Trivialitätsproblem für endlich präsentierte Gruppen unter die Lupe nehmen, dessen Unentscheidbarkeit die Grundlage für den Beweis des obigen Satzes liefert. Die Idee besteht dabei darin, dass wir eine Menge von n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten konstruieren, auf deren Fundamentalgruppen dann die genannten Unentscheidbarkeitsergebnisse anwendbar sind.

1 (Un)Entscheidbarkeit

Sei S eine Menge und $P \subset S$. Wir suchen eine "allgemeine Methode," um für ein gegebenes Element $x \in S$ das **Entscheidungsproblem** zu lösen, ob $x \in P$ liegt oder nicht. Dabei sollte diese allgemeine Methode in einem gewissen Sinne "endlich" sein, so dass sie von einer (abstrakten) Maschine durchgeführt werden könnte.
Also ist es vernünftig, das Problem, das durch (S, P) gegeben ist, in ein entsprechendes Problem (S', P') mit $S' \subset \mathbf{N}$ zu verwandeln (denn die Elemente aus n sind endlich beschreibbar). Diese Verwandlung sollte dabei in beide Richtungen "effektiv berechenbar" sein. Abbildungen mit dieser Eigenschaft werden **Gödelnummern** genannt.

Entscheidbarkeit

Wir müssen nun klären, wann ein Problem (in $\mathbf{N}$) entscheidbar bzw. berechenbar sein soll. Dafür gibt es mehrere Zugänge: etwa die klassische Rekursionstheorie, in der die berechenbaren Funktionen induktiv aus einfachen Grundfunktionen konstruiert werden. Etwas anschaulicher ist jedoch die Definition über ein abstraktes Maschinenmodell – die Turingmaschinen.

Definition. Eine **(deterministische) Turingmaschine** $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \sqcup, F)$ besteht aus

- einer endlichen **Zustandsmenge** $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$,
- einem **Eingabealphabet** $\Sigma = \{0, 1\}$,
- einem **Bandalphabet** $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$,
- einem **Blanksymbol** $\sqcup$,
- einem **Startzustand** $s \in Q$,
- einer **Übergangsfunktion** $\delta \colon Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{L, N, R\}$,
- einer Menge $F \subset Q$ von **Endzuständen** mit

$$\forall_{q \in F} \quad \forall_{a \in \Gamma} \quad \delta(q, a) = (q, a, N).$$

Die Turingmaschine $\mathcal{A}$ **stoppt im Zustand** $q \in Q$, falls

$$\forall_{a \in \Gamma} \quad \delta(q, a) = (q, a, N).$$

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird von $\mathcal{A}$ **akzeptiert**, falls $\mathcal{A}$ bei Eingabe von w in einem Zustand aus F stoppt. Die Menge

$$L(\mathcal{A}) := \{w \in \Sigma^* | \mathcal{A} \text{ akzeptiert } w\}$$

heisst die **von $\mathcal{A}$ akzeptierte Sprache**.

Eine Turingmaschine verfügt über ein zweiseitig unendliches Band, das Symbole des Bandalphabetes enthält. Im Startzustand zeigt der Schreib-/Lesekopf auf das erste Zeichen des Eingabewortes, das auf dem ansonsten nur Blanksymbole enthaltenden Band steht.
Ein Übergang der Form $\delta(q, a) = (q', a', B)$ bedeutet, dass die Maschine im Zustand q beim Lesen des Zeichens a in den Zustand q' übergeht, dabei a durch a' ersetzt und den Schreib-/Lesekopf entsprechend $B \in \{L, N, R\}$ bewegt. Hierbei bedeutet L, R, N, dass der Kopf um eine Position nach links, rechts oder gar nicht bewegt wird.

Definition. Eine Sprache (ein Problem) $L \subset \Sigma^*$ heisst **entscheidbar** (bzw. **berechenbar**, oder **rekursiv**), falls es eine Turingmaschine gibt, die bei allen Eingaben $w \in \Sigma^*$ stoppt, und w genau dann akzeptiert, wenn $w \in L$ ist.

Definition. Wir können jede Turingmaschine $\mathcal{A}$ (eindeutig) in ein Binärwort $\langle\mathcal{A}\rangle$ codieren, die sogenannte **Gödelnummer** von $\mathcal{A}$.
Zu $w \in \{0,1\}^*$ bezeichnen wir mit $\mathcal{A}(w)$ die Turingmaschine, die durch w codiert wird. Dabei vereinbaren wir, dass Worte, die in obigem Sinne keine Turingmaschine codieren, als Codes für Turingmaschinen angesehen werden, die auf keiner Eingabe stoppen.
Eine Turingmaschine, die bei Eingabe des Wortes $\langle\mathcal{A}\rangle w$ (mit $w \in \{0,1\}^*$) die Berechnung von $\mathcal{A}$ mit Eingabe w simuliert, heisst **universelle Turingmaschine**.

Es ist intuitiv – unter Verwendung der Churchschen These – leicht einzusehen, dass es universelle Turingmaschinen tatsächlich gibt.

Unentscheidbarkeit

Es stellt sich heraus, dass es Entscheidungsprobleme gibt, die nicht entscheidbar sind. Der Trick besteht hierbei in einem Diagonalargument.
Dabei hilft uns die obige Codierung, denn mit dieser können wir Turingmaschinen wieder als Eingaben für Turingmaschinen verwenden:

Satz. *Die* **Diagonalsprache**

$$L_D := \{w \in \{0,1\}^* | w \notin L(\mathcal{A}(w))\}$$

ist nicht entscheidbar. (Es gilt sogar mehr: die Diagonalsprache ist noch nicht einmal semientscheidbar.)

Beweis. Wie in allen Beweisen dieser Art, nehmen wir an, dass es eine Turingmaschine $\mathcal{A}$ gibt, die die Diagonalsprache entscheidet. Wir wenden nun $\mathcal{A}$ auf $\langle\mathcal{A}\rangle$ an:

① Sei $\langle\mathcal{A}\rangle \in L_D$, d.h. $\langle\mathcal{A}\rangle \notin L(\mathcal{A}(\langle\mathcal{A}\rangle)) = L(\mathcal{A}) = L_D$, was nicht sein kann.

② Sei $\langle\mathcal{A}\rangle \notin L_D$, d.h. $\langle\mathcal{A}\rangle \in L(\mathcal{A}(\langle\mathcal{A}\rangle)) = L(\mathcal{A}) = L_D$, was ebensowenig sein kann.

Also ist L_D nicht entscheidbar. □

Das prominenteste Beispiel unentscheidbarer Probleme ist wohl das Halteproblem:

Satz. *Das* **Halteproblem**

$$L_H := \{wv \in \{0,1\}^* | \mathcal{A}(w) \text{ stoppt auf } v\}$$

ist nicht entscheidbar.

Beweis. Angenommen, das Halteproblem ist entscheidbar, d.h. es existiert eine Turingmaschine $\mathcal{A}$ mit $L(\mathcal{A}) = L_H$. Wir zeigen nun, dass dies die Entscheidbarkeit der Diagonalsprache nach sich zieht: Sei also $w \in \{0,1\}^*$. Dann können die folgenden Fälle eintreten:

① Sei $ww \in L_H$, d.h. $\mathcal{A}(w)$ stoppt auf w. Also können wir entscheiden, ob $w \in L(\mathcal{A}(w))$ liegt oder nicht (zum Beispiel unter Verwendung einer universellen Turingmaschine).

② Sei $ww \notin L_H$, d.h. $\mathcal{A}(w)$ stoppt nicht auf w. Insbesondere gilt damit $w \notin L(\mathcal{A}(w))$.

Also können wir auch die Diagonalsprache entscheiden, im Widerspruch zu obigem Satz. Daher ist auch das Halteproblem nicht entscheidbar. □

2 Das Wort- und das Isomorphieproblem

In diesem Abschnitt werden wir die entscheidenden algebraischen Ergebnisse bereitstellen, um zu beweisen, dass das Homöomorphieproblem für n-dimensionale Mannigfaltigkeiten nicht entscheidbar ist. Die entsprechenden Sätze und Beweise stammen aus [Rabin].

Definition. Sei $\{x_1, x_2, \dots\}$ ein abzählbares Alphabet. Die **Menge Q der Präsentationen** ist die Menge aller endlichen Präsentationen

$$\Pi = (x_1, \dots, x_r | P_1, \dots, P_m),$$

wobei $P_1, \dots, P_m$ Wörter in den Zeichen $x_1, \dots, x_r$ (und deren Inversen) sind.

Wir können offensichtlich jede endliche Präsentation einer Gruppe in die obige Form bringen (indem wir die Erzeuger entsprechend umbenennen). Ausserdem ist klar, dass diese Umformung berechenbar ist. Mit Hilfe der Menge Q der Präsentationen können wir nun Präsentationen in natürliche Zahlen codieren, und damit Begriffe wie **berechenbare Mengen von Präsentationen** auf eine solide Basis stellen.

Das Wortproblem

Definition. Sei G eine endlich präsentierte Gruppe. Das **Wortproblem von G** besteht darin, für ein Wort w in den Erzeugern von G zu entscheiden, ob w – aufgefasst als Gruppenelement von G – trivial ist.

Satz. *Es gibt eine endlich präsentierte Gruppe, deren Wortproblem nicht entscheidbar ist.*

Die übliche Methode, um zu zeigen, dass ein Problem nicht entscheidbar ist, ist, dieses auf ein Problem zurückzuführen, von dem bereits bekannt ist, dass es nicht entscheidbar ist. Oft wird dazu das Halteproblem herangezogen.
Dies ist auch im Falle des Wortproblems möglich: Man muss hierfür das Halteproblem so formulieren, dass es sich in eine endliche Gruppenpräsentation übersetzen lässt. Der vollständige Beweis ist jedoch relativ lang und technisch (siehe z.B. [Britton]).

Das Isomorphieproblem für endlich präsentierte Gruppen

Das **Isomorphieproblem für endlich präsentierte Gruppen** besteht darin, für je zwei Präsentationen $\Pi, \Pi' \in Q$ zu entscheiden, ob die durch Π bzw. Π' definierten Gruppen G_Π bzw. $G_{\Pi'}$ isomorph sind oder nicht.
Wir zeigen, dass dieses Isomorphieproblem nicht entscheidbar ist. Dazu führen wir es auf das Wortproblem zurück.

Satz. *Sei P eine algebraische Eigenschaft (d.h. eine Eigenschaft, die unter Isomorphie erhalten bleibt) endlich präsentierbarer Gruppen, so dass*

1. *es eine endlich präsentierbare Gruppe G_1 gibt, die diese Eigenschaft besitzt,*

2. *es eine endlich präsentierbare Gruppe G_2 gibt, die die Eigenschaft P nicht besitzt, und auch nicht isomorph zur Untergruppe einer Gruppe ist, die P erfüllt.*

Dann ist die Menge $S(P) := \{\Pi \in Q | G_\Pi \text{ erfüllt } P\}$ nicht entscheidbar.

Korollar. *Insbesondere ist die Menge $\{\Pi \in Q | G_\Pi \cong 1\}$ nicht entscheidbar.*

Korollar. *Also ist auch das Isomorphieproblem nicht entscheidbar.*

Um den obigen Satz zu beweisen, benötigen wir die Hilfe von sogenannten Testgruppen.

Definition. Sei

$$\tau\colon (\Pi, w) \longmapsto \Pi_w$$

eine berechenbare Funktion, die jeder Präsentation $\Pi \in Q$ und jedem Wort w über den Erzeugern aus Π eine Präsentation Π_w zuordnet. Dann heisst τ eine **Testgruppenkonstruktion**, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- folgt $w = 1$ bereits aus den Relationen von Π, so ist $G_{\Pi_w} \cong 1$.

- folgt nicht $w = 1$ aus den Relationen von Π, so ist G_Π isomorph zu einer Untergruppe von G_{Π_w}.

Ist τ eine solche Testgruppenkonstruktion, so heisst G_{Π_w} **Testgruppe zu** Π **und** w.

Dass es solche Testgruppenkonstruktionen tatsächlich gibt, wird in [Rabin] gezeigt. Dazu wird Π jeweils derart um Erzeuger und Relationen ergänzt, dass

- im ersten Fall die hinzugefügten Erzeuger durch die Relationen bereits trivial werden und ausserdem auch das "Verschwinden" der ursprünglichen Erzeuger erreicht wird.

- im zweiten Fall aber keine neuen Relationen zwischen den ursprünglichen Erzeugern entstehen.

Wir sind nun in der Lage, den obigen Satz zu beweisen:

Beweis. Seien G_1 und G_2 wie im Satz. Nach dem letzten Abschnitt gibt es eine Präsentation Π_0, so dass das Wortproblem für die von Π_0 erzeugte Gruppe nicht entscheidbar ist.
Wir betrachten nun das freie Produkt

$$G := G_2 * G_{\Pi_0},$$

d.h. auch G ist eine endlich präsentierbare Gruppe. Eine Präsentation $\Pi \in Q$ von G können wir dabei aus Π_0 und einer Präsentation von G_2 berechnen.
Da G_{Π_0} zu einer Untergruppe von G isomorph ist, ist insbesondere auch das Wortproblem für G (bezüglich Π) nicht entscheidbar.
Angenommen, $S(P)$ ist entscheidbar. Ist w ein Wort in den Erzeugern von Π, so können wir (nach Definition) eine Präsentation Π_w der entsprechenden Testgruppe berechnen.
Wir setzen

$$G(w) := G_1 * G_{\Pi_w},$$

d.h. aus einer Präsentation von G_1 und Π_w können wir eine Präsentation $\Pi_{G(w)}$ von $G(w)$ berechnen. Mit der Entscheidbarkeit von $S(P)$ können wir nun entscheiden, ob $G(w)$ die Eigenschaft P besitzt, oder nicht.
Dann folgt aber auch die Entscheidbarkeit des Wortproblems von G (bezüglich Π), denn:

① Folgt $w = 1$ bereits aus den Relationen von Π, so ist $G_{\Pi_w} \cong 1$, und damit $G(w) \cong G_1$. Also besitzt auch $G(w)$ die Eigenschaft P.

② Folgt hingegen nicht $w = 1$ aus den Relationen, so ist $G = G_\Pi$ isomorph zu einer Untergruppe von G_{Π_w}, d.h. G_2 ist isomorph zu einer Untergruppe von $G(w)$. Nach der Definition von G_2 kann $G(w)$ also P nicht erfüllen.

D.h. $\Pi_{G(w)} \in S(P)$ ist äquivalent dazu, dass $w = 1$ aus den Relationen von Π folgt. Dies steht allerdings im Widerspruch dazu, dass das Wortproblem für Π nicht entscheidbar ist.
Also ist auch $S(P)$ nicht entscheidbar. □

3 Die Unentscheidbarkeit des Homöomorphieproblems

Mit den Hilfsmitteln der vorangegangenen Abschnitte werden wir nun den eingangs erwähnten Satz beweisen. Die Darstellung folgt dabei [Markov].

Satz. *Sei $n \in \mathbf{N}_{\geq 4}$. Dann ist das Homöomorphieproblem für n-dimensionale Mannigfaltigkeiten nicht entscheidbar.*

Damit der Satz Sinn macht, müssen wir uns zunächst wieder darauf einigen, wie die entsprechenden Objekte (in diesem Fall n-dimensionale Mannigfaltigkeiten) in natürliche Zahlen codiert werden sollen.
Auf jeden Fall sollte eine solche Codierung die folgende Eigenschaft besitzen: Ist ein Polyeder (der zu einer Mannigfaltigkeit homöomorph ist) kombinatorisch (durch eine

Triangulierung) gegeben, so können wir daraus einen Code der entsprechenden Mannigfaltigkeit berechnen.
(Zur genauen Definition von Polyedern bzw. Triangulierungen siehe [tomDieck, S.62ff]).

Beweis des Satzes für $n = 4$

Wir werden uns zum Beweis des Satzes zu jeder endlichen Präsentation von Gruppen eine entsprechende vierdimensionale Mannigfaltigkeit konstruieren (genauer: einen entsprechenden Polyeder). Diese Polyeder müssen wir so geschickt konstruieren, dass wir bis zu einem gewissen Grad aus der Isomorphie der repräsentierten Gruppen auf die Homöomorphie der Polyeder schliessen können.
Sei K^4 ein (abgeschlossener) vierdimensionaler Ball in S^4, S^3 sein Rand, und K^3 ein dreidimensionaler (abgeschlossener) Ball in S^3. Mit I bezeichnen wir im folgenden das Intervall $[-1,1]$.
Sei nun

$$\Pi = (x_1, \dots, x_r | P_1, \dots, P_m)$$

eine endliche Präsentation. Als erstes kleben wir für jeden der r Erzeuger einen Henkel an K^4 an:
Sei

$$Z := K^3 \times I,$$

und $\phi_1, \dots, \phi_r \colon Z \longmapsto S^4$ Diffeomorphismen (jeweils auf ihr Bild), die sich nicht in die Quere kommen, d.h.

$$\begin{aligned} \forall_{i,j\in\{1,\dots,r\},i\neq j} \quad & \phi_i Z \cap \phi_j Z = \emptyset, \\ \forall_{i\in\{1,\dots,r\}} \quad & K^4 \cap \phi_i Z \subset S^3, \\ & S^3 \cap \phi_i Z = \phi_i(K^3 \times \{-1,1\}). \end{aligned}$$

Dann definieren wir den Polyeder

$$L_r := K^4 \cup \bigcup_{j\in\{1,\dots,r\}} \phi_j Z,$$

d.h. wir kleben r Henkel $\phi_1 Z, \dots, \phi_r Z$ an K^4 an.
Sei nun $P \in \{P_1, \dots, P_m\}$. Wir konstruieren einen Weg, der P "darstellt." Das Wort P lasse sich schreiben als

$$P = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot x_{i_s}^{\varepsilon_s}$$

mit $i_1, \dots, i_s \in \{1, \dots, r\}$ und $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s \in \{-1, 1\}$.
Wir können Punkte $z_1, \dots, z_s, y_1, \dots, y_s \in K^3$ so wählen, dass (mit $z_{s+1} := z_1, y_{s+1} := y_1$)

$$\begin{aligned} \forall_{j,h\in\{1,\dots,s\},j\neq h,i_j=i_h} \quad & [(z_j, -\varepsilon_j), (y_j, \varepsilon_j)] \cap [(z_h, -\varepsilon_h), (y_h, \varepsilon_h)] = \emptyset, \\ \forall_{j,h\in\{1,\dots,s\},j\neq h} \quad & [\phi_{i_j}(y_j, \varepsilon_j), \phi_{i_{j+1}}(z_{j+1}, -\varepsilon_{j+1})] \cap [\phi_{i_h}(y_h, \varepsilon_h), \phi_{i_{h+1}}(z_{h+1}, -\varepsilon_{h+1})] = \emptyset. \end{aligned}$$

Dann setzen wir

$$W := \bigcup_{j\in\{1,\dots,s\}} (A_j \cup B_j),$$

wobei

$$\begin{aligned}\forall_{j\in\{1,\ldots,s\}}\quad A_j &:= \phi_{i_j}[(z_j,-\varepsilon_j),(y_j,\varepsilon_j)]\\ B_j &:= [\phi_{i_j}(y_j,\varepsilon_j),\phi_{i_{j+1}}(z_{j+1},-\varepsilon_{j+1})].\end{aligned}$$

Aufgrund der Eigenschaften von $z_1,\ldots,z_s$ und $y_1,\ldots,y_s$ folgt, dass sich dieser Weg W nirgends schneidet (d.h. $W\cong S^1$).
Ist $P=\varepsilon$ das leere Wort, so wählen wir für W ein diffeomorphes Bild von S^1 im Inneren von K^4.
Sei c der Mittelpunkt von K^3. Dann exisitiert eine stetige Abbildung $\psi\colon K^3\times W\longrightarrow \overset{\circ}{L}_r$ (die einen Homöomorphismus auf das Bild induziert) mit

- Für alle $x\in W$ ist $\psi(c,x)=x$.
- Für alle $j\in\{1,\ldots,s\}$ ist ψ auf $K^3\times A_j$ differenzierbar.
- Für alle $j\in\{1,\ldots,s\}$ ist ψ auf $K^3\times B_j$ differenzierbar.
- Für alle $j\in\{1,\ldots,s\}$ ist

$$\begin{aligned}&\psi(K^3\times A_j)\subset\phi_{i_j}Z,\ \text{und}\\ &\psi(K^3\times B_j)\subset K^4.\end{aligned}$$

Falls $P=\varepsilon$ ist, verlangen wir stattdessen, dass ψ den Mittelpunkt "erhält", dass ψ auf $K^3\times W$ differenzierbar ist, und $\psi(K^3\times W)\subset\overset{\circ}{K}{}^4$ ist.
Das Innere des Bildes von ψ nennen wir dann einen **Tunnel zum Wort** P.
Wir können also zu jedem der Worte $P_1,\ldots,P_m$ einen entsprechenden Tunnel $T_1,\ldots,T_m$ konstruieren. Diese können wir ohne Beschränkung so "eng" wählen, dass

$$\forall_{i,j\in\{1,\ldots,m\},i\neq j}\quad \overline{T}_i\cap\overline{T}_j=\emptyset$$

ist, wobei der Abschluss in S^4 gemeint ist.
Wir verkleben nun die Henkel so, dass wir einen vierdimensionalen Polyeder erhalten, der eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit ist, und dessen Fundamentalgruppe isomorph zu G_Π ist. Dazu definieren wir

$$\begin{aligned}J_0 &:= L_r\setminus\bigcup_{j\in\{1,\ldots,m\}}T_j,\\ \forall_{i\in\{1,\ldots,m\}}\quad J_i &:= S^4\setminus T_i,\\ H_{-1} &:= L_r\times\{-1\},\\ \forall_{i\in\{1,\ldots,m\}}\quad H_i &:= J_i\times\{i\},\end{aligned}$$

und

- wir identifizieren die Punkte $(x,0)$ und $(x,-1)$ für alle $x\in\partial L_r$.

- wir identifizieren für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ die Punkte $(x, 0)$ und (x, i) für alle $x \in \partial T_i$.

Diese Konstruktion ist offensichtlich so, dass wir die Kombinatorik des entstehenden Polyeders $\mathcal{M}(\Pi) = \mathcal{M}(P_1 * \cdots * P_m * r)$ aus der Präsentation berechnen können. Ausserdem ist klar, dass dieser Polyeder eine vierdimensionale (zusammenhängende) Mannigfaltigkeit ist. Desweiteren ist diese Konstruktion (modulo Homöomorphie) wohldefiniert.

Lemma 1. *Sei $\Pi = (x_1, \ldots, x_r | P_1, \ldots, P_m)$ eine endliche Präsentation von Gruppen. Dann ist*

$$\pi_1(\mathcal{M}(\Pi)) \cong G_\Pi.$$

In diesem Beweis geht stark ein, dass die Dimension ≥ 4 ist.

Beweis. Im wesentlichen folgt dies aus dem Satz von Seifert und van Kampen (siehe etwa [Massey, Kapitel 4]). Wichtig ist dabei, dass die Fundamentalgruppe von $\partial K^3 \cong S^2$ trivial ist. Denn dann folgt

$$\pi_1\left(L_r \cup_{\partial L_r} L_r \setminus \bigcup_{j \in \{1,\ldots,m\}} T_j\right) \cong \mathbf{Z}_1 * \cdots * \mathbf{Z}_r.$$

Induktiv erhalten wir daraus – wegen $\pi_1(S^4 \setminus T_j) \cong 1$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ –

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathcal{M}(\Pi)) &\cong \mathbf{Z}_1 * \cdots * \mathbf{Z}_r / \langle P_1, \ldots, P_m \rangle \\ &= G_\Pi. \end{aligned}$$ □

Korollar. *Ist G_Π nicht die triviale Gruppe, so ist $\mathcal{M}(P_1 * \cdots * P_m *^{m+r} r)$ auch nicht homöomorph zu $\mathcal{M}(*^m 0)$.* □

Dabei soll $*^m$ für $* \varepsilon * \cdots * \varepsilon$ (m-mal) stehen. Für die aus gruppentheoretischer Sicht unwesentlichen leeren Relationen interessieren wir uns, da nach unserer Konstruktion zunächst nicht klar ist, ob die Hinzunahme einer leeren Relation in der Präsentation den Homöomorphietyp des entstehenden Polyeders unbeeinflusst lässt. Dass wir auch im Falle einer leeren Relation überhaupt einen Tunnel graben, ist im folgenden Lemma wichtig.
Wir zeigen nun, dass die entstehenden Polyeder unter einfachen Operationen auf den Gruppenpräsentationen bis auf Homöomorphie übereinstimmen.

Lemma 2. *Die Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}(P_1 * \ldots P_m * r)$ und $\mathcal{M}(Q_1 * \cdots * Q_m * r)$ sind homöomorph, wenn $Q_1, \ldots, Q_m$ aus $P_1, \ldots, P_m$ entstehen, indem wir Wortteile der Form $x_j^{\varepsilon} x_j^{-\varepsilon}$ "streichen."*

Beweis. Dies dürfte zumindest anschaulich klar sein. Was passiert aber in dem Spezialfall, wenn wir aus einem Wort der Form $x_j x_j^{-1}$ den Wortteil $x_j x_j^{-1}$ streichen? Dann sichert uns gerade das Tunnelgraben im Falle des leeren Wortes die Gültigkeit des Lemmas. □

Lemma 3. *Die Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}(P_1 * \ldots, P_m * r)$ und $\mathcal{M}(Q_1 * \cdots * Q_m * r)$ sind homöomorph, wenn es ein $i \in \{1, \ldots, m\}$ gibt, so dass Q_i eine zyklische Vertauschung von P_i ist, und*

$$\forall_{j \in \{1,\ldots,m\} \setminus \{i\}} \quad Q_j = P_j.$$

Beweis. Dies ist klar, da wir bereits die Tunnel identisch wählen können. ☐

Lemma 4. *Die Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}(P_1 * \cdots * P_m * r)$ und $\mathcal{M}(Q_1 * \cdots * Q_m * r)$ sind homöomorph, wenn es ein $i \in \{1, \ldots, m\}$ gibt, so dass Q_i das inverse Wort von P_i ist, und*

$$\forall_{j \in \{1,\ldots,m\} \setminus \{i\}} \quad Q_j = P_j.$$

Beweis. Auch hier können wir einfach dieselben Tunnel verwenden. ☐

Lemma 5. *Die Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}(P_1 * \cdots * P_m * r)$ und $\mathcal{M}(Q_1 * \cdots * Q_m * r)$ sind homöomorph, wenn es $i, h \in \{1, \ldots, m\}$ mit $i \neq h$ gibt, und*

$$\begin{aligned} & Q_i = P_i P_h \\ \forall_{j \in \{1,\ldots,m\} \setminus \{i\}} \quad & Q_j = P_j. \end{aligned}$$

Beweis. Der Homöomorphietyp der entstehenden Mannigfaltigkeiten hängt nicht davon ab, ob wir die Verklebungen auf einmal oder nacheinander ausführen.
Wir führen also in beiden Fällen zunächst nur die Verklebungen zu den Relationen mit Index ungleich i durch (insbesondere ist hier $Q_h = P_h$ dabei). Dann liefern offenbar die Verklebungen von $P_i P_h$ bzw. P_i denselben Homöomorphietyp. ☐

Lemma 6. *Für jedes $k \in \mathbf{N}$ sind die Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}(x_1 * \cdots x_r *^k r)$ und $\mathcal{M}(*^k 0)$ homöomorph.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass die Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}(0) \cong S^4$ und $\mathcal{M}(x_1 * 1)$ homöomorph sind – der Rest folgt dann durch vollständige Induktion. Ersteres ist anschaulich klar. ☐

Lemma 7. *Stellt $\Pi = (x_1, \ldots, x_r | P_1, \ldots, P_m)$ die triviale Gruppe dar, so gilt*

$$\mathcal{M}(P_1 * \cdots * P_m *^{r+m} r) \cong \mathcal{M}(*^m 0).$$

Beweis. Aus [Boone, Haken, Poenaru, Lemma 5] erhalten wir: Ist G_Π die triviale Gruppe, so können wir $\Pi *^{m+r}$ durch endlich viele Operationen wie in Lemma 2 bis 5 auf $(x_1, \ldots, x_r | x_1, \ldots, x_r) *^m$ transformieren. Durch wiederholte Anwendung der Lemmata 2 bis 5 folgt daher

$$\mathcal{M}(P_1 * \cdots * P_m *^{m+r} r) \cong \mathcal{M}(x_1 * \cdots * x_r *^m r)$$

und damit (aus Lemma 6)

$$\mathcal{M}(P_1 * \cdots * P_m *^{m+r} r) \cong \mathcal{M}(*^m 0).$$ ☐

Beweis. (des Satzes, für $n = 4$). *Angenommen,* das Homöomorphieproblem für vierdimensionale Mannigfaltigkeiten ist entscheidbar. Wir zeigen nun, dass dann auch das Trivialitätsproblem für endlich präsentierte Gruppen entscheidbar ist:
Sei $\Pi = (x_1, \dots, x_m | P_1, \dots, P_m) \in Q$ eine endliche Präsentation. Mit den obigen Methoden erhalten wir den Polyeder $\mathcal{M}(P_1 * \dots * P_m *^{r+m} r)$, und damit auch einen Code des Polyeders. Ausserdem können wir auch einen Code von $\mathcal{M}(*^m 0)$ berechnen.
Nach Voraussetzung können wir also entscheiden, ob $\mathcal{M}(P_1 * \dots * P_m *^{r+m} r)$ und $\mathcal{M}(*^m 0)$ homöomorph sind. Mit Lemma 7 und dem Korollar zu Lemma 1 erhalten wir, dass wir dann auch entscheiden können, ob $G_\Pi \cong G_{(x_1,\dots,x_r|P_1,\dots,P_r)*^{m+r}}$ und $1 \cong G_{(|)*^m}$ isomorph sind.
Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass das Trivialitätsproblem für endlich erzeugte Gruppen nicht lösbar ist. Also ist auch das Homöomorphieproblem für vierdimensionale Mannigfaltigkeiten nicht entscheidbar. □

. . . und der ganze Rest

Beweis. (des Satzes, für $n > 4$). Sei nun $n > 4$, und Π wie oben. Sind die Mannigfaltigkeiten $S^{n-4} \times \mathcal{M}(\Pi *^{m+r})$ und $S^{n-4} \times \mathcal{M}(*^m 0)$ homöomorph, so ist

$$\begin{aligned}
\pi_1(S^{n-4}) \times \pi_1(\mathcal{M}(\Pi *^{m+r})) &\cong \pi_1(S^{n-4} \times \mathcal{M}(\Pi *)) \\
&\cong \pi_1(S^{n-4} \times \mathcal{M}(*^m 0)) \\
&\cong \pi_1(S^{n-4}) \times \pi_1(\mathcal{M}(*^m 0)),
\end{aligned}$$

und damit $G_\Pi \cong \pi_1(\mathcal{M}(\Pi *^{m+r})) \cong \pi_1(\mathcal{M}(*^k 0)) \cong 1$.
Ist umgekehrt G_Π trivial, so ist $\mathcal{M}(\Pi *^{m+r}) \cong \mathcal{M}(*^m 0)$, und damit insbesondere auch $S^{n-4} \times \mathcal{M}(\Pi *^{m+r}) \cong S^{n-4} \times \mathcal{M}(*^m 0)$.
Dabei können wir offensichtlich jeweils eine Triangulierung der entsprechenden Mannigfaltigkeiten berechnen.
Da das Isomorphieproblem für endlich präsentierte Gruppen jedoch nicht entscheidbar ist, folgt die Behauptung des Satzes. □

4 Weitere Resultate

Mit stärkeren Aussagen aus der Gruppentheorie kann man auch entsprechend stärkere Aussagen über die Entscheidbarkeit des Homöomorphieproblems für Mannigfaltigkeiten beweisen.
In [Markov] wird zum Beispiel von folgendem Satz Gebrauch gemacht:

Satz. *Es existieren natürliche Zahlen r und m, so dass das Trivialitätsproblem bereits für Präsentationen mit r Erzeugern und m Relationen nicht entscheidbar ist.*

Dies liefert dann:

Satz. *Sei $n \in \mathbf{N}_{\geq 4}$. Dann gibt es einen Polyeder M^n, so dass bereits das Problem "ist ein gegebener Polyeder homöomorph zu M^n?" nicht entscheidbar ist.*

Noch stärkere Resultate werden in [Boone, Haken, Poenaru] bewiesen. Dort wird unter anderem auch gezeigt, dass das Homöomorphieproblem zu den schwersten (im Sinne von Turinggraden) semientscheidbaren Problemen gehört.
Ausserdem treffen die jeweiligen Sätze nicht nur auf "Homöomorphie," sondern auch auf "Homotopie," "Diffeomorphie," etc. zu. Besonderes für "Diffeomorphie" ist jedoch viel Aufwand nötig, um die Mannigfaltigkeiten zu codieren ([Boone, Haken, Poenaru]).

Literatur

[Boone, Haken, Poenaru] Boone, Haken, Poenaru *"On Recursively Unsolvable Problems in Topology and Their Classification"* Contributions to Mathematical Logic, 1968, pp. 37-74

[Britton] Britton *"The Word Problems for Groups"* Proc. London Math. Soc., 1958, pp. 493-506

[Markov] Markov *"Insolubility of the Problem of Homeomorphy"* Proc. ICM, 1958 (russisch)

[Massey] Massey "Algebraic Topology: An Introduction" Springer, 1991

[Rabin] Rabin *"Recursive Unsolvability of Group Theoretic Problems"* Annals of Mathematics, Vol. 67, 1958, pp. 172-194

[tomDieck] tom Dieck *"Topologie"* de Gruyter, 2000