Mathematik-Workshop

Schülerinformationstag 2011

9. November 2011, Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg

http://www.mathematik.uni-regensburg.de/aktuelles/infotag11.html

Gruppe:

Teilnehmer:

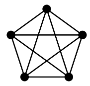
- Diese Aufgabensammlung besteht aus 3 Seiten und 8 Aufgaben. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrer Gruppennummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt. Sie können gerne zusätzliches Papier bekommen.
- Bei Fragen zu den Aufgabenstellungen können Sie sich gerne an einen der Mitarbeiter der Fakultät wenden.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Aufgaben zu bearbeiten.
- Es können im Total 32 Punkte erreicht werden.
- Es sind keine Hilfsmittel wie Computer, Mobiltelephone etc. gestattet.
- Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe	Platz
Punkte maximal	4	4	4	4	4	4	4	4	32	
erreichte Punkte										

Universität Regensburg

FZM

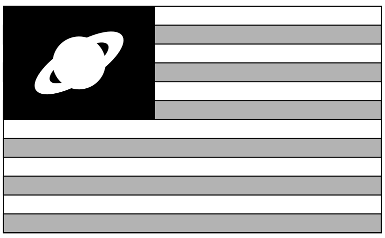
Aufgabe ❶ (4 Punkte). Die Kanten des Graphen K_5 (siehe Abbildung) seien mit den Farben rot bzw. blau gefärbt. Gibt es dann auf jeden Fall ein rotes oder ein blaues Dreieck in K_5 ?



Aufgabe ❷ (4 Punkte). Auf dem Planet Paritas befinden sich endlich viele verschiedene Nationen. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Nationen, die mit einer ungeraden Anzahl von anderen Nationen (wechselseitige) diplomatische Beziehungen haben, gerade ist.

Aufgabe ❸ (4 Punkte). Die horizontalen Streifen der Flagge der galaktischen Allianz stehen für die zwölf Planeten, die Mitglied der Allianz sind (s. Abbildung). Nachdem zwei Planeten der galaktischen Allianz durch ein Experiment mit einem Teilchenbeschleuniger in einem schwarzen Loch verschwunden sind, muss die Flagge der galaktischen Allianz so modifiziert werden, dass sie statt zwölf nur noch zehn Streifen hat.

Ist es möglich, die Flagge mit einem (nicht notwendigerweise geraden) Schnitt in zwei Teile zu zerlegen, die sich zu einer rechteckigen Flagge mit demselben Flächeninhalt zusammensetzen lassen, so dass die entstehende Flagge nur zehn horizontale Streifen hat? Begründen Sie Ihre Antwort!



Aufgabe ❹ (4 Punkte). Ein Chip ist in 2011×2012 quadratische Felder aufgeteilt und durch Transistoren der Form 2×2 bzw. 4×1 vollständig besetzt. Einer der 2×2-Transistoren überhitzt und als Ersatzteil steht nur noch ein 4×1-Transistor zur Verfügung.

Ist es möglich, die funktionstüchtigen Transistoren und den Ersatztransistor so anzuordnen, dass der Chip wieder vollständig belegt ist?

Aufgabe ❺ (4 Punkte). Der Planet Dikti-Sun ist eine Scheibe, deren Radius 2011 Kilometer lang ist. Auf Dikti-Sun hat ein Immobilienmakler acht Häuser vermittelt. Als Rechtfertigung für die astronomischen Preise hat er seinen acht Kunden angepriesen, dass jedes dieser Häuser unfassbar idyllisch sei, da jeweils das nächste Haus mindestens 2011 Kilometer entfernt ist.

Ist die Behauptung des Maklers vertrauenswürdig oder gibt es einen mathematischen Grund, warum er sein Versprechen nicht halten kann? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe ❻ (4 Punkte). Zeigen Sie, dass

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$$

eine rationale Zahl ist.

Aufgabe ❼ (4 Punkte). Gibt es eine natürliche Zahl n, so dass die Dezimaldarstellung der Quersumme des Quadrats n^2 genau

$$\underbrace{2011 \cdots 2011}_{2012 \text{ mal}}$$

ist?

Aufgabe ❽ (4 Punkte). Ein Zauberer führt folgenden „Trick“ vor: Als Vorbereitung hat er hundert von 1 bis 100 durchnumerierte Karten auf eine schwarze, eine weiße und eine rote Schachtel verteilt (in jeder der Schachteln befindet sich dabei mindestens eine Karte). Ein Zuschauer soll aus zwei verschiedenen Schachteln jeweils eine Karte auswählen (ohne, dass der Zauberer das sehen kann) und soll dem Zauberer die Summe der beiden Zahlen auf den gewählten Karten nennen. Der Zauberer nennt daraufhin die Farbe der dritten Schachtel.

Auf wieviele verschiedene Weisen kann der Zauberer vor der Show die Karten so auf die Schachteln verteilen, dass der Trick funktioniert?