Sommerschule

Fixpunkte, Färbungen und Topologie

22.–24. August 2011, Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg

http://www.sommerschule2011.master-mathematik.de

Einige klassische Resultate der Kombinatorik lassen sich elegant mit topologischen Methoden erhalten; zum Beispiel können Färbungs- und Einbettungsprobleme für Graphen in topologische Probleme übersetzt werden, die sich dann mit Mitteln der algebraischen Topologie lösen lassen.

Eine zentrale Rolle spielen in diesem Kontext die Modellierung kombinatorischer Probleme durch geeignete simpliziale Komplexe und Fixpunktsätze wie der Satz von Borsuk-Ulam und der Brouwersche Fixpunktsatz.

Diese Sommerschule bietet die Gelegenheit, diese Thematik zusammen mit anderen mathematikbegeisterten Studenten zu erarbeiten. Dabei übernimmt jeder Teilnehmer einen der Vorträge; zusätzlich wird es Übungs-/Fragestunden geben.

Zielgruppe.

Talentierte Mathematik-Studenten im zweiten oder dritten Studienjahr

Anmeldung.

Die Sommerschule ist auf 12 Teilnehmer begrenzt; die Teilnehmer werden finanziell durch das Johannes Kepler Research Center for Mathematics der Universität Regensburg unterstützt.
Interessenten bewerben sich bitte schriftlich (per email oder Brief) bis zum 15. Mai 2011 bei

Prof. Dr. Clara Löh
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg
93040 Regensburg
clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de
http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/

Erforderliche Unterlagen: Lebenslauf, Auflistung der bereits belegten Veranstaltungen im Studium und der abgelegten Prüfungen (mit Noten), Angabe von drei bevorzugten Vortragsthemen (s. Rückseite).

Kontakt.

Prof. Dr. Clara Löh
clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de

Universität Regensburg

FZM

Vortragsthemen

Grundlagen

1. Grundlagen der Graphentheorie Grundbegriffe der Graphentheorie, chromatische Zahl, planare Graphen, Satz von Kuratowski (ohne Beweis), Beispiele für Graphen und ihre Eigenschaften.
Literatur: Alle Bücher über Graphentheorie, z.B. [3, Kapitel 4.2, 4.4, 5.1, 5.2] [4]

2. Topologische Grundlagen Grundbegriffe aus der Topologie (topologische Räume, Stetigkeit, Kompaktheit, Zusammenhang), Beispiele für topologische Räume (insbesondere metrische Räume), Quotientenräume (inklusive universeller Eigenschaft), Homotopie(äquivalenz), was ist algebraische Topologie?
Literatur: Alle Bücher über (algebraische) Topologie, z.B. [8, Kapitel 1.1–1.2, Kapitel 4.1] [6] [1] [2] [5]

3. Simpliziale Komplexe – kombinatorische Topologie Geometrische simpliziale Komplexe, Triangulierungen, (abstrakte) simpliziale Komplexe, simpliziale Abbildungen, geometrische Realisierung simplizialer Komplexe, Quotienten von simplizialen Komplexen, Beispiele simplizialer Komplexe und simplizialer Abbildungen, simpliziale Approximation, Zusammenhang mit partiell geordneten Mengen.
Literatur: [8, Kapitel 1.3–1.7, Kapitel 4.1] [1]

Fixpunktsätze und erste Anwendungen

4. Der Satz von Borsuk-Ulam Verschiedene Formulierungen des Satzes von Borsuk-Ulam, Äquivalenz dieser Formulierungen, Beweis des Satzes von Borsuk-Ulam, Folgerung: der Brouwersche Fixpunktsatz.
Literatur: [8, Kapitel 2.1–2.2]

5. Der Brouwersche Fixpunktsatz und algebraische Topologie Kategorien und Funktoren, Eilenberg-Steenrod-Axiome, kurze Skizze der Konstruktion von simplizialer Homologie (und Beispiele), Folgerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes aus den Axiomen.
Literatur: [5, Kapitel 2] [12, Kapitel IV] [7, Kapitel 1] [9]

6. Topologie in der Spieltheorie – Nash-Gleichgewichte Kurze Einführung in die Spieltheorie, Nash-Gleichgewichte, Existenz von Nash-Gleichgewichten (und Beweis mit Hilfe des Brouwerschen Fixpunktsatzes), Beispiele.
Literatur: [2, Kapitel 4.7.3] [10], alle Bücher über Spieltheorie

7. Das Sandwich-Theorem und Aufteilung von Ketten Wiederholung der benötigten maßtheoretischen Grundbegriffe, Sandwich-Theorem (und Verallgemeinerung) (mit Beweis), Sandwich-Theorem für diskrete Mengen (mit Beweis), Aufteilung von farbigen Ketten.
Literatur: [8, Kapitel 3.1–3.2] [11]

Färbungs- und Einbettungsprobleme

8. Kneser-Graphen und die Kneser-Vermutung Formulierung der Kneser-Vermutung, Kneser-Graphen, Satz von Lovász-Kneser (mit Beweis), Satz von Dol'nikov und Satz von Schrijver (wenn möglich mit Beweis).
Literatur: [8, Kapitel 3.3–3.5]

9. Verallgemeinerte Antipoden und $\mathbf{Z}/2$-Index $\mathbf{Z}/2$-Räume, (freie) $\mathbf{Z}/2$-Operationen, $\mathbf{Z}/2$-Abbildungen, $\mathbf{Z}/2$-Index, Eigenschaften des $\mathbf{Z}/2$-Index (insbesondere auch die Verbindung mit Joins und k-Zusammenhang) (mit Beweis), Beispiele.
Literatur: [8, Kapitel 4.2–4.3, Kapitel 5.2–5.3]

10. Nicht-Einbettbarkeit I – topologisches Radon-Theorem Topologisches Radon-Theorem (mit Beweis), reduzierte Joins (zur Motivation evtl. auch reduzierte Produkte), $K_{3,3}$ ist nicht planar (mit Beweis).
Literatur: [8, Kapitel 5.1, (5.4), 5.5.]

11. Nicht-Einbettbarkeit II – der Satz von van Kampen-Flores Satz von van Kampen-Flores (mit Beweis), K_5 ist nicht planar (mit Beweis), Bier-Sphären, Ungleichung von Sarkaria.
Literatur: [8, Kapitel 5.1, 5.6, 5.7]

12. Nicht-Einbettbarkeit III – Abschätzungen der chromatischen Zahl Der Färbungs-/Einbettungssatz von Sarkaria (mit Beweis), Beispiele für daraus folgende Nicht-Einbettbarkeitsresultate (insbesondere für $K_{3,3}$ und $\mathbf{R}P^2$), untere Schranke für die chromatische Zahl eines Graphen (mit Beweis).
Literatur: [8, Kapitel 5.8–5.9]

Literatur

[1] M.A. Armstrong. *Basic Topology*, korrigierter Nachdruck des Originals von 1979, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1983.

[2] W.F. Basener. *Topology and its applications*, Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience, 2006.

[3] R. Diestel. *Graph theory*, dritte Auflage, Graduate Texts in Mathematics, Band 173, Springer, 2005.

[4] J.M. Harris, J.L. Hirst, M.J. Mossinghoff. *Combinatorics and Graph Theory*, zweite Auflage, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2008.

[5] A. Hatcher. *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002. http://www.math.cornell.edu/˜hatcher/.

[6] K. Jänich. *Topologie*, achte Auflage, Springer, 2005.

[7] W. Lück. *Algebraische Topologie: Homologie und Mannigfaltigkeiten*, Vieweg Verlag, 2005.

[8] J. Matoušek. *Using the Borsuk-Ulam Theorem*, Lectures on topological methods in combinatorics and geometry. Written in cooperation with Anders Björner and Günter M. Ziegler, *Universitext*, Springer, 2003.

[9] J.R. Munkres. *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley, 1984.

[10] J.F. Nash. Non-cooperative games. *Ann. of Math.* (2), 54, S. 286–295, 1951.

[11] W. Rudin. *Real and complex analysis*, dritte Auflage, McGraw-Hill Book Co., 1987.

[12] T. tom Dieck. *Topologie*, zweite Auflage, de Gruyter, 2000.