Übungen zur Algebra I

Prof. Dr. S. Bosch/C. Löh — Blatt 10 vom 20. Dezember 2007

Wie üblich sind die Antworten zu Fragen durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel zu belegen.

Aufgabe 1 (Normale Körpererweiterungen**).**

1. Sei L' ein Zwischenkörper einer normalen Körpererweiterung L/K. Ist dann auch L'/K normal?
2. Sind alle Körpererweiterungen vom Grad 3 normal?

Aufgabe 2 (Zerfällungskörper; Bosch „Algebra," 3.5.10**).**

1. Bestimmen Sie über $\mathbb{Q}$ einen Zerfällungskörper des Polynoms
$$X^6 - 7 \cdot X^4 + 3 \cdot X^2 + 3 \in \mathbb{Q}[X].$$
2. Bestimmen Sie über $\mathbb{F}_{13}$ einen Zerfällungskörper des Polynoms
$$X^6 - 7 \cdot X^4 + 3 \cdot X^2 + 3 \in \mathbb{F}_{13}[X].$$

Aufgabe 3. Seien $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ die reellen, positiven Wurzeln aus 2 bzw. 3.

1. Zeigen Sie, dass $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}$ algebraisch ist und bestimmen Sie den Grad $[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$.
2. Ist die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})/\mathbb{Q}$ normal?

Aufgabe 4 (Bosch „Algebra," 3.5.8**).** Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $n > 0$. Sei L ein Zerfällungskörper von f über K.

1. Zeigen Sie, dass $[L : K]$ ein Teiler von $n!$ ist.

   Hinweis. Zeigen Sie zunächst: für alle $x, y \in \mathbb{N}$ ist $x! \cdot y!$ ein Teiler von $(x + y)!$.
2. Zeigen Sie, dass f irreduzibel ist, falls $[L : K] = n!$ ist.

Aufgabe 5*. Sei $\alpha_0 := 0$ und induktiv
$$\alpha_{n+1} := \sqrt{2 + \alpha_n}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$; hierbei bezeichne $\sqrt{\ }$ jeweils die reelle, positive Wurzel. Zu welchen $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{Q}(\alpha_n) \subset \mathbb{Q}(e^{\frac{\pi \cdot i}{m}})$?

Bemerkung. Man kann zeigen, dass jeder Zwischenkörper von $\mathbb{Q}(e^{\frac{\pi \cdot i}{m}})/\mathbb{Q}$ über $\mathbb{Q}$ normal ist – dies ist jedoch mit den Ihnen momentan zur Verfügung stehenden Mitteln noch nicht möglich.

Bitte wenden

Die folgenden Aufgaben bieten die Gelegenheit, den bisher gelernten Stoff zu wiederholen und zu vertiefen; für jede dieser Aufgaben können Sie bis zu vier Zusatzpunkte bekommen.

Aufgabe 6 (Gruppen; vier Zusatzpunkte)**.**

1. Enthält jede Gruppe der Ordnung 15 eine Untergruppe der Ordnung 3?
2. Zeigen Sie, dass nicht jede Gruppe der Ordnung 42 einen Normalteiler der Ordnung 2 enthält.

Aufgabe 7 (Ringe; vier Zusatzpunkte)**.**

1. Die Menge $M_2(\mathbb{Q})$ der 2×2-Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ bildet einen Ring bezüglich komponentenweiser Addition und Matrizenmultiplikation. Gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $M_2(\mathbb{Q})$ zu einem Unterring des Polynomrings $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$ isomorph ist?
2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist die Menge der invertierbaren Elemente von $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal in $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$?

Aufgabe 8 (Körper; vier Zusatzpunkte)**.**

1. Gibt es einen Körper K mit unendlich vielen Elementen, der einen Körperhomomorphismus $K \longrightarrow \mathbb{F}_7$ zulässt?
2. Sei K ein Körper mit 243 Elementen und L ein Körper mit 343 Elementen. Gibt es einen Körperhomomorphismus $K \longrightarrow L$?

Aufgabe 9 (Körper; vier Zusatzpunkte)**.**

1. Sei $\sqrt[4]{2}$ die reelle, positive, vierte Wurzel aus 2. Bestimmen Sie alle Zwischenkörper der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$.
2. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\alpha^4 - 4 \cdot \alpha^3 + 6 \cdot \alpha^2 - 4 \cdot \alpha + 4 = 0$. Bestimmen Sie den Grad von $\mathbb{Q}(\alpha)$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 10 (Körper; vier Zusatzpunkte)**.** Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$.

1. Zeigen Sie: Ist K endlich, so besitzt jedes Element von K genau eine p-te Wurzel in K.
2. Gilt dies auch, falls K nicht endlich ist?

Abgabe bis zum 10. Januar 2008, 8:00 Uhr

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!