Übungen zur Algebra I

Prof. Dr. S. Bosch/C. Löh — Blatt 12 vom 17. Januar 2008

Aufgabe 1 (Bosch „Algebra," 3.7.5**).**

1. Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung, sei $\alpha \in L$ über K separabel und $\beta \in L$ über K rein inseparabel. Zeigen Sie, dass
$$K(\alpha, \beta) = K(\alpha + \beta).$$
2. Geben Sie ein Beispiel für eine algebraische Körpererweiterung L/K und ein Element $\alpha \in L$, das über K weder separabel, noch rein inseparabel ist.

Aufgabe 2 (Galoisgruppen**).**

1. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $e^{\frac{2\pi i}{7}}$ über $\mathbb{Q}$.
2. Zeigen Sie: Die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{7}})/\mathbb{Q}$ ist galoissch und die Galoisgruppe dieser Erweiterung ist zyklisch.

Aufgabe 3 (Ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{F}_p$; Bosch „Algebra," 3.8.4**).** Sei $p \in \mathbb{N}$ prim. Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}_{p^\infty} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^{n!}}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{F}_p$ ist.

Aufgabe 4 (Vollkommene Körper; Bosch „Algebra," 3.7.8**).** Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung. Zeigen Sie:

1. Ist K ein vollkommener Körper, so ist auch L vollkommen.
2. Ist L ein vollkommener Körper und ist die Körpererweiterung L/K endlich, so ist auch K vollkommen.

Aufgabe 5* (Algebraischer Abschluss; Bosch „Algebra," 3.7.11**).** Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung mit folgender Eigenschaft: Jedes irreduzible Polynom aus $K[X]$ hat mindestens eine Nullstelle in L. Zeigen Sie, dass L ein algebraischer Abschluss von K ist.
Hinweis. Betrachten Sie zunächst den Fall, dass L/K separabel ist.

Abgabe bis zum 24. Januar 2008, 8:00 Uhr