

Übungen zur Algebra I

Prof. Dr. S. Bosch/C. Löh

Blatt 2 vom 25. Oktober 2007

Aufgabe 1 (Mehr über S_3).

1. Bestimmen Sie alle Untergruppen von S_3 , der symmetrischen Gruppe von $\{1, 2, 3\}$. Welche davon sind Normalteiler?
2. Bestimmen Sie alle Faktorgruppen von S_3 .

Aufgabe 2 ((Ur)bilder von Gruppenhomomorphismen; Bosch „Algebra“, 1.2.4). Beweisen oder widerlegen Sie:

1. Das Urbild einer Untergruppe/eines Normalteilers unter einem Gruppenhomomorphismus ist eine Untergruppe/ein Normalteiler.
2. Das Bild einer Untergruppe/eines Normalteilers unter einem Gruppenhomomorphismus ist eine Untergruppe/ein Normalteiler.

Aufgabe 3 (Bosch „Algebra“, 1.2.5). Sei G eine endliche Gruppe und H_1, H_2 Untergruppen von G mit $H_1 \subset H_2$. Zeigen Sie, dass

$$(G : H_1) = (G : H_2) \cdot (H_2 : H_1).$$

Aufgabe 4 (Produkte zyklischer Gruppen).

1. Für welche $n \in \mathbb{N}$ sind die Gruppen $\mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ isomorph?
2. Bestimmen Sie (bis auf Isomorphie) alle Gruppen, die höchstens fünf Elemente enthalten.

Hinweis. Hier kann sich Aufgabe 2 von Blatt 1 als nützlich erweisen.

Aufgabe 5*. Gibt es ein Analogon zum Satz von Schröder-Bernstein in der Gruppentheorie? Mit anderen Worten: Sind Gruppen G und H , für die es Monomorphismen $G \rightarrow H$ und $H \rightarrow G$ gibt, isomorph?

Abgabe bis zum **2. November** 2007 (Freitag!), 8:00 Uhr