Übungen zur Algebra II

Prof. Dr. S. Bosch/C. Löh — Blatt 1 vom 10. April 2008

Aufgabe 1 (Die Eulersche φ-Funktion**).**

1. Zu $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $P(n)$ die Menge aller positiven Primfaktoren von n. Zeigen Sie, dass
$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{p \in P(n)} (1 - p^{-1}).$$
2. Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$, für die $\varphi(n)$ eine Potenz von 2 ist.

Aufgabe 2 (Bosch „Algebra," 4.5.9**).** Bestimmen Sie alle Einheitswurzeln, die in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}(i \cdot \sqrt{2})$ bzw. $\mathbb{Q}(i \cdot \sqrt{3})$ liegen; hierbei bezeichnet $\sqrt{\ }$ jeweils die positive, reelle Wurzel.

Aufgabe 3 (Kreisteilungskörper und endliche Erweiterungen über $\mathbb{Q}$**).**

1. Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein Körper, so dass die Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ endlich ist. Zeigen Sie, dass K nur endlich viele Einheitswurzeln enthält.
2. Zeigen Sie, dass es Körper $K \subset \mathbb{C}$ gibt, so dass die Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ endlich ist aber kein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $K \subset \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{n}})$ existiert.

Aufgabe 4 (Bosch „Algebra," 4.5.6**).** Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, so dass $p - 1$ ein Produkt von n verschiedenen Primfaktoren ist, und sei $\zeta_p \in \overline{\mathbb{Q}}$ eine primitive p-te Einheitswurzel.

1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}$ eine zyklische Galoiserweiterung ist.
2. Zeigen Sie, dass die Erweiterung $\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}$ genau 2^n Zwischenkörper enthält.

Aufgabe 5*. Bestimmen Sie – natürlich ohne technische Hilfsmittel zu verwenden – die letzten acht Stellen der Binärdarstellung von 27^{2008}.

Abgabe bis zum 17. April 2008, 8:00 Uhr