Übungen zur Algebra II

Prof. Dr. S. Bosch/C. Löh — Blatt 4 vom 1. Mai 2008

Aufgabe 1 (Bosch „Algebra,“ 5.1.4)**.** Sei G eine endliche Gruppe, sei H eine Untergruppe von G und sei N_H der Normalisator von H in G. Wir schreiben

$$M := \bigcup_{g \in G} g \cdot H \cdot g^{-1}.$$

1. Zeigen Sie, dass $\operatorname{ord} M \leq [G : N_H] \cdot \operatorname{ord} H$.
2. Zeigen Sie, dass $M \neq G$, falls $H \neq G$ ist.

Aufgabe 2 (Sylowgruppen; Bosch „Algebra,“ 5.2.4)**.** Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, sei $n \in \mathbb{N}$, und sei K ein endlicher Körper der Charakteristik p. Zeigen Sie, dass die oberen Dreiecksmatrizen, deren Diagonalelemente gleich 1 sind, eine p-Sylowgruppe in $\mathrm{GL}(n, K)$ bilden.
Hinweis. Eine Möglichkeit die Ordnung von $\mathrm{GL}(n, K)$ zu bestimmen besteht darin, die linear unabhängigen Systeme von n Spaltenvektoren in K^n zu zählen.

Aufgabe 3 (Darstellungen)**.** Eine *Darstellung* ist eine Gruppenoperation in der Kategorie der Vektorräume, genauer: Eine *Darstellung* einer Gruppe G auf einem K-Vektorraum V ist ein Gruppenhomomorphismus $G \longrightarrow \operatorname{Aut}_K(V)$.

1. Die symmetrische Gruppe S_3 operiert auf der Menge $\{e_1, e_2, e_3\}$ der Einheitsvektoren von $\mathbb{R}^3$; diese Operation induziert eine Darstellung von S_3 auf $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass es nichttriviale Unterräume U und $V \subset \mathbb{R}^3$ mit
$$S_3 \cdot U \subset U, \qquad S_3 \cdot V \subset V, \qquad U \oplus V = \mathbb{R}^3$$
gibt.
2. Gibt es eine Gruppe G, die eine Darstellung $G \longrightarrow \operatorname{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ mit folgender Eigenschaft besitzt? Es gibt einen nichttrivialen Unterraum $U \subset \mathbb{R}^2$ mit $G \cdot U \subset U$, aber es gibt keinen Unterraum $V \subset \mathbb{R}^2$ mit $G \cdot V \subset V$ und $\mathbb{R}^2 = U \oplus V$.

Aufgabe 4 (Stetige Operationen)**.** Eine *stetige Operation* ist eine Gruppenoperation in der Kategorie der topologischen Räume, genauer: Sei G eine Gruppe und sei X ein topologischer Raum (zum Beispiel eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$). Eine Operation von G auf X heißt *stetig*, wenn für jedes $g \in G$ die zugehörige Abbildung $X \longrightarrow X, x \mapsto g \cdot x$ stetig ist. Eine Operation von G auf X heißt *frei*, falls $g \cdot x \neq x$ für alle $x \in X$ und alle $g \in G - \{1\}$ gilt.

1. Gibt es eine freie, stetige Operation von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ auf $S^1 \subset \mathbb{C}$?
2. Gibt es eine freie, stetige Operation von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}$?

Aufgabe 5* (Färbungen)**.** Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Seiten eines Würfels schwarz bzw. weiß zu färben? Hierbei werden zwei Färbungen des Würfels als identisch angesehen, falls Sie durch eine Verkettung von Rotationen des Würfels auseinander hervorgehen.

Abgabe bis zum 8. Mai 2008, 8:00 Uhr