Übungen zur Algebra II

Prof. Dr. S. Bosch/C. Löh — Blatt 7 vom 29. Mai 2008

Aufgabe 1 (Bosch „Algebra," 5.4.2**).**

1. Seien $p, q \in \mathbb{N}$ zwei verschiedene Primzahlen. Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung $p \cdot q$ auflösbar ist.
2. Geben Sie ein Beispiel für eine Gruppe, die nicht abelsch ist und deren Ordnung das Produkt zweier verschiedener Primzahlen ist, und geben Sie eine zugehörige Normalreihe mit abelschen Faktoren an.

Aufgabe 2 (Bosch „Algebra," 5.4.3**).** Sei G eine endliche Gruppe.

1. Zeigen Sie: Sind H und H' normale, auflösbare Untergruppen in G, so ist auch $H \cdot H' := \{h \cdot h' \mid h \in H,\ h' \in H'\}$ eine normale, auflösbare Untergruppe von G.
2. Folgern Sie, dass G eine eindeutig bestimmte, größte normale, auflösbare Untergruppe besitzt, und dass diese unter allen Automorphismen von G invariant ist.

Aufgabe 3 (Nilpotente Gruppen; Bosch „Algebra," 5.4.7**).** Sei G eine Gruppe. Wir schreiben $C^1(G) := G$ und definieren induktiv

$$C^{n+1}(G) := \bigl[G, C^n(G)\bigr]$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Die Gruppe G heißt *nilpotent*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $C^n(G) = \{1\}$ gibt.

Zeigen Sie, dass jede nilpotente Gruppe auflösbar ist.

Aufgabe 4 (Nilpotente Gruppen, Fortsetzung; Bosch „Algebra," 5.4.6, 5.4.8**).** Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Im folgenden bezeichne $T \subset \mathrm{GL}(n, K)$ die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen und $T_1 \subset \mathrm{GL}(n, K)$ die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen, deren Diagonalelemente 1 sind.

1. Zeigen Sie, dass T_1 nilpotent ist und dass T (für $K \neq \mathbb{F}_2$) nicht nilpotent ist.
2. Zeigen Sie, dass T auflösbar ist (insbesondere gibt es auflösbare Gruppen, die nicht nilpotent sind).

Aufgabe 5. Ist die Gruppe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ auflösbar?

Abgabe bis zum 5. Juni 2008, 8:00 Uhr