# Übungen zur Algebra II

Prof. Dr. S. Bosch/C. Löh Blatt 8 vom 5. Juni 2008

**Aufgabe 1.**

1. Sei $p \in \mathbb{N}$ prim. Gibt es separable, polynomiale Gleichungen über $\mathbb{F}_p$, die über $\mathbb{F}_p$ nicht durch Radikale auflösbar sind?
2. Gibt es polynomiale Gleichungen über $\mathbb{Q}(X)$, die über $\mathbb{Q}(X)$ nicht durch Radikale auflösbar sind?

**Aufgabe 2.**

1. Sei $K$ ein Körper mit $\operatorname{char} K = 0$, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$, und $a_0, a_n, a_{2n}, a_{3n} \in K$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $X^{4n} + a_{3n} \cdot X^{3n} + a_{2n} \cdot X^{2n} + a_n \cdot X^n + a_0 = 0$ über $K$ durch Radikale auflösbar ist.
2. Sind alle Galoiserweiterungen vom Grad 75 auflösbar?

**Aufgabe 3 (**Bosch „Algebra," 6.1.3**).** Bestimmen Sie die Galoisgruppe des Polynoms

$$X^7 - 8 \cdot X^5 - 4 \cdot X^4 + 2 \cdot X^3 - 4 \cdot X^2 + 2$$

über $\mathbb{Q}$ und entscheiden Sie, ob diese auflösbar ist.

**Aufgabe 4 (**Maximale auflösbare Erweiterungen**).** Sei $K$ ein Körper mit algebraischem Abschluss $\overline{K}$. Zeigen Sie, dass $K$ in $\overline{K}$ eine maximale auflösbare Erweiterung besitzt, d.h. zeigen Sie, dass es einen Zwischenkörper $A$ von $\overline{K}/K$ mit folgender Eigenschaft gibt: Ist $L/K$ eine endliche Erweiterung mit $L \subset \overline{K}$, so ist $L/K$ genau dann auflösbar, wenn $L \subset A$ ist.

**Aufgabe 5 (**Polynome über $\mathbb{Q}$ mit Galoisgruppe $S_p$; Bosch „Algebra," 6.1.5**).** Zeigen Sie, dass es zu jeder Primzahl $p \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ ein irreduzibles Polynom in $\mathbb{Q}[X]$ vom Grad $p$ gibt, dessen Galoisgruppe (über $\mathbb{Q}$) zur symmetrischen Gruppe $S_p$ isomorph ist.
*Hinweis.* Man gehe von einem separablen Polynom $h_p \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad $p$ aus, das genau zwei nicht-reelle Nullstellen besitzt, und approximiere $h_p$ durch geeignete irreduzible Polynome. Man benutze dabei, dass sich die Nullstellen von $h_p$ bei stetiger Veränderung der Koeffizienten von $h_p$ ebenfalls stetig verändern.

Abgabe bis zum 12. Juni 2008, 8:00 Uhr