Übungen zur Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 0 vom 20. Oktober 2017

Aufgabe 1 (Gruppenhomomorphismen). Seien G, H Gruppen, sei $f\colon G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Für alle $g \in G$ gilt $f(g^{-1}) = \bigl(f(g)\bigr)^{-1}$.
2. Für alle $g, h \in G$ gilt $f(g \cdot h) = f(h) \cdot f(g)$.

Aufgabe 2 (Inversion). Sei $(G, \cdot\,)$ eine Gruppe.

1. Zeigen Sie: Für alle $g \in G$ ist $(g^{-1})^{-1} = g$.
2. Zeigen Sie: Für alle $g, h \in G$ ist $(g \cdot h)^{-1} = h^{-1} \cdot g^{-1}$.
3. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

   ist genau dann ein Automorphismus von G, wenn G abelsch ist.

Aufgabe 3 (Linksnebenklassen). Sei G eine Gruppe und sei $H \subset G$ eine Untergruppe.

1. Zeigen Sie, dass die durch

$$\forall_{g_1, g_2 \in G} \quad g_1 \sim_H g_2 \Longleftrightarrow g_1^{-1} \cdot g_2 \in H$$

   gegebene Relation $\sim_H$ auf G eine Äquivalenzrelation ist.
2. Zeigen Sie: Für alle $g \in G$ ist $g \cdot H = \{g' \in G \mid g \sim_H g'\}$.

Aufgabe 4 (Isometriegruppe). Bestimmen Sie die Isometriegruppe der Teilmenge

$$L := \bigl\{(x, 0) \bigm| x \in [0, 1]\bigr\} \cup \bigl\{(0, x) \bigm| x \in [0, 1]\bigr\}$$

bezüglich der euklidischen Metrik d_2 auf $\mathbb{R}^2$. Machen Sie das Resultat nicht nur anschaulich plausibel, sondern führen Sie alle Details aus!

Bonusaufgabe (mathematische Allgemeinbildung). Wer war Vladimir Voevodsky? Warum wird diese Aufgabe gerade jetzt gestellt?

---

keine Abgabe; diese Aufgaben werden in den Übungen in der zweiten Vorlesungswoche besprochen