Übungen zur Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig Blatt 1 vom 20. Oktober 2017

Aufgabe 1 (Gruppenhomomorphismen). Seien G, H Gruppen, sei $f\colon G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist $K \subset H$ eine Untergruppe von H, so ist das Urbild $f^{-1}(K)$ eine Untergruppe von G.
2. Ist $K \subset G$ eine Untergruppe von G, so ist $f(K)$ eine Untergruppe von H.

Aufgabe 2 (Verknüpfungstabellen). Sei $(G, \,\cdot\,)$ eine Gruppe.

1. Zeigen Sie: Ist $g \in G$, so ist die folgende Abbildung bijektiv:

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto g \cdot h \end{aligned}$$

2. Folgern Sie: Die untenstehende Verknüpfungstabelle definiert *keine* Gruppenstruktur auf $\{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$:

	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$
$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$
$\spadesuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$
$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$
$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$

Aufgabe 3 (Konjugation). Sei $(G, \,\cdot\,)$ eine Gruppe.

1. Zeigen Sie: Ist $g \in G$, so ist die folgende Abbildung ein Automorphismus von G:

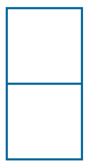
$$\begin{aligned} c_g\colon G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto g \cdot h \cdot g^{-1} \end{aligned}$$

2. Folgern Sie: Ist $\mathrm{Aut}(G) = \{\mathrm{id}_G\}$, so ist G abelsch.

Aufgabe 4 (Isometriegruppe). Bestimmen Sie die Isometriegruppe von

$$B := \bigl([0,1] \times \{0,1,2\}\bigr) \cup \bigl(\{0,1\} \times [0,2]\bigr) \subset \mathbb{R}^2$$

bezüglich der euklidischen Metrik d_2 auf $\mathbb{R}^2$.



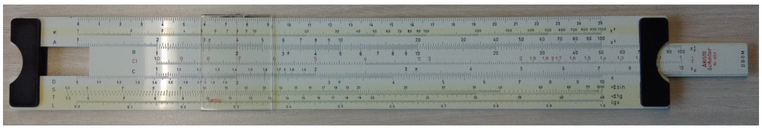
Hinweis. Es genügt, wenn Sie alle Elemente dieser Gruppe und ihre Verknüpfungen explizit beschreiben und die wichtigsten Beweisschritte skizzieren.

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Isabelle). Formulieren Sie den untenstehenden Satz und seinen Beweis auf die „gewöhnliche“ menschenfreundliche Weise. Was hat das mit Gruppentheorie zu tun?

```
theory Groups-Exercise

  imports Main

begin

class blubb =
  fixes argh :: 'a ⇒ 'a ⇒ 'a  (infixl ## 70)
  fixes iik :: 'a (e)
  fixes oink :: 'a ⇒ 'a
  assumes drei: x ## (y ## z) = (x ## y) ## z
  assumes iik-nix: x ## e = x
  assumes oink-iik: x ## oink x = e
  assumes iik-oink:  oink x ## x = e

theorem (in blubb) nix-iik: e ## x = x

proof −

  have e ## x = (x ## oink x) ## x
    by (simp only: oink-iik)
  also have ... = x ## (oink x ## x)
    by (simp only: drei)
  also have ... = x ## e
    by (simp only: iik-oink)
  also have ... = x
    by (simp only: iik-nix)
  finally show ?thesis by simp

qed

theorem (in blubb) blorx: oink x = oink y ⟹ x = y

proof −

  assume slurp: oink x = oink y
  have x = x ## e
    by (simp only: iik-nix)
  also have ... = x ## (oink y ## y)
    by (simp only: iik-oink)
  also have ... = (x ## oink y) ## y
    by (simp only: drei)
  also have ... = (x ## oink x) ## y
    by (simp only: slurp)
  also have ... = e ## y
    by (simp only: oink-iik)
  also have ... = y
    by (simp only: nix-iik)
  finally show ?thesis by simp

qed

end
```

Bonusaufgabe (Rechenschieber; für Lehrämtler (als optionale Alternative zur obigen Bonusaufgabe)). Wie funktionieren Rechenschieber? Was hat das mit dem Gruppenisomorphismus $\exp\colon (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}_{>0}, \cdot\,)$ zu tun?



Abgabe bis zum 27. Oktober 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen