Übungen zur Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 10 vom 22. Dezember 2017

Aufgabe 1 (Irreduzibilität). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Das Polynom $T^3 + 2019 \cdot T^2 + 42 \cdot T + 9 \in \mathbb{Z}[T]$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[T]$.
2. Das Polynom $X^2 \cdot Y + Y^2 \cdot X^{2018} + X + Y + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{F}_2[X, Y]$.

Aufgabe 2 (Restklassenkörper). Zu $a \in \mathbb{Z}$ sei $f_a := T^4 + a \cdot T + 2 \in \mathbb{Q}[T]$.

1. Zeigen Sie: Es gibt unendlich viele $a \in \mathbb{Z}$, für die $\mathbb{Q}[T]/(f_a)$ ein Körper ist.
2. Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{Z}$, für die $\mathbb{Q}[T]/(f_a)$ *kein* Körper ist.

   Hinweis. Diese Polynome sind primitiv in $\mathbb{Z}[T]$. Warum hilft das?

Aufgabe 3 (Primkörper). Sei K ein Körper.

1. Zeigen Sie, dass K genau einen bezüglich Inklusion kleinsten Körper enthält, den *Primkörper von* K.
2. Zeigen Sie:
   - Ist $\operatorname{char} K = 0$, so ist der Primkörper von K isomorph zu $\mathbb{Q}$.
   - Ist $p \in \mathbb{N}$ prim und $\operatorname{char} K = p$, so ist der Primkörper von K isomorph zu $\mathbb{F}_p$.

Aufgabe 4 (Binomi für Dummies). Sei $p \in \mathbb{N}$ prim, sei K ein Körper der Charakteristik p und sei

$$\begin{aligned} F \colon K &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto x^p \end{aligned}$$

der *Frobeniusendomorphismus*.

1. Zeigen Sie, dass F tatsächlich ein Ringhomomorphismus ist.
2. Wie kann man den Frobeniusendomorphismus von $\mathbb{F}_p$ auch beschreiben?
3. Zeigen Sie: Ist K endlich, so ist F ein Isomorphismus.
4. Zeigen Sie: Ist K unendlich, so ist F im allgemeinen *kein* Isomorphismus.

Bonusaufgabe (invariant und irreduzibel). Sei $p \in \mathbb{N}$ prim. Zeigen Sie, dass

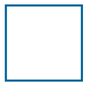
$$T^p - T - 1 \in \mathbb{F}_p[T]$$

in $\mathbb{F}_p[T]$ irreduzibel ist.
Hinweis. Das obige Polynom ist unter dem von „$T \longmapsto T + 1$“ induzierten Ringisomorphismus $\mathbb{F}_p[T] \longrightarrow \mathbb{F}_p[T]$ invariant. Betrachten Sie nun die Primfaktorzerlegung ...

Bitte wenden

Die folgenden Aufgaben bieten die Gelegenheit, den bisher gelernten Stoff zu Gruppen, Ringen und Körpern zu wiederholen und zu vertiefen; für jede dieser Aufgaben können Sie bis zu vier Zusatzpunkte bekommen.

Bonusaufgabe (Gruppen für Schüler). Wie kann man Schülern (der Mittelstufe) anhand eines Pappquadrats erklären, was eine (Symmetrie)Gruppe ist? Wie könnte man das Pappquadrat dafür markieren/dekorieren?



Bonusaufgabe (Struktur endlicher Gruppen). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist G eine Gruppe mit $|G| = 2018$, so ist jede 2-Sylowgruppe in G normal.
2. Je zwei Untergruppen von S_5 mit genau acht Elementen sind isomorph.

Bonusaufgabe (Sylowmatrizen). Sei $p \in \mathbb{N}$ prim und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Zeigen Sie, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{12}, a_{13}, \dots, a_{n-1,n} \in \mathbb{F}_p \right\} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$$

eine p-Sylowgruppe in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ ist.
Hinweis. Zählen!

Bonusaufgabe (kleiner Fermat für Schüler).

1. Sei $p \in \mathbb{N}$ prim. Beweisen Sie induktiv (natürlich ohne den kleinen Satz von Fermat zu verwenden), dass $x^p - x$ für jedes $x \in \mathbb{Z}$ durch p teilbar ist. Schreiben Sie den Beweis so auf, dass er für einen Mittelstufenschüler verständlich ist.
2. Wie könnte man aufbauend darauf das RSA-Verfahren Schülern erklären?

Bonusaufgabe (Kubismus). Zeigen Sie: Es gibt *keine* ganzen Zahlen x, y, z mit

$$x^3 + y^3 + z^3 = 2020.$$

Hinweis. Reduktion!

Bonusaufgabe (noch ein Körper). Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{Z}[T]/(T^4 - T^3 - T^2 - 3 \cdot T + 5, T^3 + T^2 + T - 1)$$

ein Körper ist.
Hinweis. Kann man dieses Ideal einfacher darstellen?

Bonusaufgabe (Skript). Finden Sie so viele Fehler im Skript wie möglich!

Abgabe bis zum 12. Januar 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen

Frohe Weihnachten und ein Gutes Neues Jahr!