Übungen zur Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig Blatt 11 vom 12. Januar 2018

Aufgabe 1 (Charakteristik)**.** Seien K und L Körper. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Gibt es einen Körperhomomorphismus $K \longrightarrow L$, so ist $\operatorname{char} K = \operatorname{char} L$.
2. Ist $\operatorname{char} K = \operatorname{char} L$, so gibt es einen Körperhomomorphismus $K \longrightarrow L$.

Aufgabe 2 (ungerade Grade)**.** Sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung und sei $\alpha \in L$ mit $[K(\alpha) : K] = 2019$. Zeigen Sie, dass $K(\alpha) = K(\alpha^2)$.

Aufgabe 3 (ein Zerfällungskörper von $T^4 - 42$ über $\mathbb{Q}$)**.** Wir betrachten den Zwischenkörper $K := \mathbb{Q}(\sqrt[4]{42}, i)$ in $\mathbb{C} \mid \mathbb{Q}$. Bearbeiten Sie zwei der folgenden vier Aufgaben:

1. Liegen alle komplexen Nullstellen von $T^4 - 42$ in K ? Liegen alle komplexen Nullstellen von $T^4 - 42$ in $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{42})$?
2. Bestimmen Sie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ mit
$$\frac{1}{\sqrt[4]{42} - 1} = a + b \cdot \sqrt[4]{42} + c \cdot \sqrt{42} + d \cdot \sqrt{42} \cdot \sqrt[4]{42}.$$
3. Zeigen Sie, dass $[K : \mathbb{Q}] = 8$ ist.
   Hinweis. Zeigen Sie zunächst $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{42}) \cap \mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q}$. Warum hilft das?
4. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Gal}(K, \mathbb{Q})$ *kein* Element der Ordnung 8 enthält.
   Hinweis. Wieviele Nullstellen haben $T^4 - 42$ bzw. $T^2 + 1$ in K ?

Aufgabe 4 (Grade von Komposita)**.** Sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung und seien M, N Zwischenkörper von $L \mid K$.

1. Zeigen Sie, dass $[M \cdot N : M] \leq [N : K]$ ist.
   Hinweis. Ist $[N : K]$ endlich, so ist $N \mid K$ insbesondere auch endlich erzeugt und man kann induktiv argumentieren . . .
2. Folgern Sie: Ist $\operatorname{ggT}\bigl([M : K], [N : K]\bigr) = 1$, so ist
$$[M \cdot N : K] = [M : K] \cdot [N : K].$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & M \cdot N \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
M \arrow[dr, dash] & & N \arrow[dl, dash] \\
 & K &
\end{tikzcd}$$

Bonusaufgabe (Transzendenz)**.** Zeigen Sie, dass die reelle Zahl
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0.110001000000000000000001\ldots$$
über $\mathbb{Q}$ transzendent ist.
Hinweis. Warum ist diese Zahl nicht rational? Zeigen Sie, dass sich algebraische Zahlen „nicht zu gut durch rationale Zahlen“ approximieren lassen. Schließen Sie dann daraus, dass die obige Zahl nicht algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist.

Abgabe bis zum 19. Januar 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen