Übungen zur Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig Blatt 12 vom 19. Januar 2018

Aufgabe 1 (algebraische Zahlen). Sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung und seien $\alpha, \beta \in L$ algebraisch über K. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Ist $K(\alpha) = K(\beta)$, so haben α und β dasselbe Minimalpolynom über K.
2. Haben α und β dasselbe Minimalpolynom über K, so ist $K(\alpha) = K(\beta)$.

Aufgabe 2 (algebraische Erweiterungen). Sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung und sei M ein Zwischenkörper von $L \mid K$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Die Körpererweiterung $L \mid K$ ist algebraisch.
2. Die Körpererweiterungen $L \mid M$ und $M \mid K$ sind algebraisch.

Aufgabe 3 (Wurzeln). Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, sei K ein Körper, der ein Zerfällungskörper von $T^n - 1 \in K[T]$ über K ist, und sei $c \in K \setminus \{0\}$. Außerdem sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$ mit $\alpha^n = c$.

1. Zeigen Sie, dass $K(\alpha) \subset L$ ein Zerfällungskörper von $T^n - c$ über K ist.
2. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Gal}(K(\alpha), K)$ zyklisch ist.

   Hinweis. Konstruieren Sie mithilfe des Konjugationsprinzips und einer primitiven n-ten Einheitswurzel einen injektiven Gruppenhomomorphismus von $\operatorname{Gal}(K(\alpha), K)$ in eine zyklische Gruppe.

Aufgabe 4 (Fixkörper). Sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung, sei $G \subset \operatorname{Gal}(L, K)$ eine endliche Untergruppe und sei

$$M := L^G := \{x \in L \mid \forall_{\sigma \in G} \quad \sigma(x) = x\}$$

der *Fixkörper von $L \mid K$ bezüglich G*. Sei $\alpha \in L$.

1. Zeigen Sie, dass M ein Zwischenkörper von $L \mid K$ ist.
2. Sei $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ eine maximale Familie in G, für die $\sigma_1(\alpha), \dots, \sigma_m(\alpha)$ alle verschieden sind, und sei

   $$f := \prod_{j=1}^{m} \bigl(T - \sigma_j(\alpha)\bigr) \in L[T].$$

   Zeigen Sie, dass f bereits in $M[T]$ liegt.
3. Zeigen Sie, dass $[M(\alpha) : M] \leq |G|$.
4. Zeigen Sie: Das Minimalpolynom von α über M zerfällt in L in paarweise verschiedene Linearfaktoren.

Bonusaufgabe (Galois). Wo hängt Galois im Mathematikgebäude? Wer sind seine Nachbarn? Warum sieht Galois auf allen Bildern so jung aus?

Abgabe bis zum 26. Januar 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen