Übungen zur Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 13 vom 26. Januar 2018

Aufgabe 1 (algebraischer Abschluss)**.** Sei K ein Körper. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Gilt für jede Körpererweiterung $L \mid K$, dass $[L : K] \in \{1, \infty\}$, so ist K algebraisch abgeschlossen.
2. Ist K algebraisch abgeschlossen, so gilt für jede Körpererweiterung $L \mid K$, dass $[L : K] \in \{1, \infty\}$.

Aufgabe 2 (Galoisgruppen von Gleichungen)**.**

1. Bestimmen Sie die Galoisgruppe des Polynoms $T^4+T^3+T^2+T+1$ über $\mathbb{Q}$.

   Hinweis. Was hat das mit ζ_5 und Eisenstein zu tun?
2. Bestimmen Sie die Galoisgruppe des Polynoms $T^3 - 2$ über $\mathbb{F}_5$.

Aufgabe 3 (Ableitungskriterium)**.** Sei K ein Körper, sei $f \in K[T] \setminus K$ normiert und sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung mit der Eigenschaft, dass f in $L[T]$ in Linearfaktoren zerfällt.

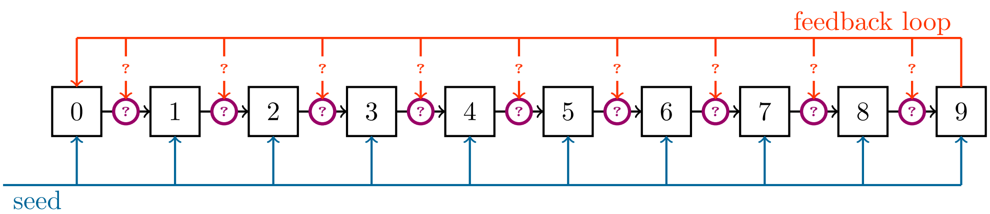
1. Zeigen Sie, dass f genau dann eine mehrfache Nullstelle in L besitzt, wenn $\mathrm{ggT}(f, Df) \neq 1$ (in $L[T]$; Bonusaufgabe: in $K[T]$) ist.
2. Zeigen Sie: Ist f in $K[T]$ irreduzibel, so besitzt f genau dann eine mehrfache Nullstelle in L, wenn $Df = 0$ ist.

Aufgabe 4 (Klassifikation endlicher Körpererweiterungen von endlichen Körpern)**.** Sei F ein endlicher Körper und sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

1. Zeigen Sie: Bis auf Isomorphie gibt es genau eine Körpererweiterung $L \mid F$ über F vom Grad k.

   Hinweis. Sei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann $T^m - T$ ein Teiler von $T^{m^n} - T$ in $K[T]$ ist. Warum hilft das?
2. Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe dieser Körpererweiterung $L \mid F$ isomorph zu $\mathbb{Z}/k$ ist (erzeugt von einer geeigneten Potenz des Frobeniusendomorphismus von L).

Bonusaufgabe (LFSR)**.** Konstruieren Sie ein LFSR mit Periodenlänge 1023. Schreiben Sie dazu ein Programm, das ein geeignetes Polynom in $\mathbb{F}_2[T]$ findet und zeigt, dass dieses Polynom die gewünschten Eigenschaften besitzt. Vervollständigen Sie dann die untenstehende Skizze:



Abgabe bis zum 2. Februar 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen