Übungen zur Algebra

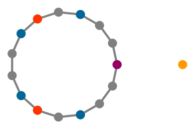
Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig Blatt 14 vom 2. Februar 2018

Aufgabe 1 (normal/separabel und Zwischenkörper). Sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung und sei M ein Zwischenkörper von $L \mid K$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist $L \mid K$ normal, so sind auch $L \mid M$ und $M \mid K$ normal.
2. Ist $L \mid K$ separabel, so sind auch $L \mid M$ und $M \mid K$ separabel.

Aufgabe 2 (Fünfzehn). Sei $\zeta_{15} := e^{2\cdot\pi\cdot i/15} \in \mathbb{C}$.

1. Konstruieren Sie einen Isomorphismus $\big(\mathbb{Z}/(15)\big)^\times \cong \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$.
2. Bestimmen Sie alle Untergruppen von $\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$.
3. Bestimmen Sie $\operatorname{Gal}\big(\mathbb{Q}(\zeta_{15}), \mathbb{Q}\big)$ möglichst explizit.
4. Bestimmen Sie alle Zwischenkörper von $\mathbb{Q}(\zeta_{15}) \mid \mathbb{Q}$.
   Hinweis. Geben Sie primitive Elemente an. Was hat das mit $\sqrt{5}$ zu tun?!



Aufgabe 3 (schon wieder Fünfzehn). Sei $L \mid K$ eine Galoiserweiterung vom Grad 15. Zeigen Sie: Ist M ein Zwischenkörper von $L \mid K$, so ist auch $M \mid K$ eine Galoiserweiterung.
Hinweis. Es war einmal ein Sylowsatz ...

Aufgabe 4 (Fixkörper). Sei $L \mid K$ eine Galoiserweiterung. Zeigen Sie, dass

$$L^{\operatorname{Gal}(L,K)} = K.$$

Hinweis. Konjugationsprinzip, was sonst?

Bonusaufgabe (zyklische Erweiterungen). Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und K enthalte n verschiedene n-te Einheitswurzeln. Sei $L \mid K$ eine Galoiserweiterung mit $\operatorname{Gal}(L,K) \cong \mathbb{Z}/n$. Zeigen Sie, dass es dann ein $c \in K$ gibt, so dass L ein Zerfällungskörper von $T^n - c$ über K ist.
Hinweis. Sei $\sigma \in \operatorname{Gal}(L,K) \cong \mathbb{Z}/n$ ein Erzeuger.

1. Fassen Sie σ als K-linearen Endomorphismus von L auf und zeigen Sie, dass es eine primitive n-te Einheitswurzel gibt, die ein Eigenwert von σ ist (die Argumente aus Beispiel II.3.3.23 helfen dabei!). Sei $\alpha \in L$ ein zugehöriger Eigenvektor.
2. Zeigen Sie, dass $c := \alpha^n$ in K liegt (Fixkörper!).
3. Erinnern Sie sich daran, dass $K(\alpha) \subset L$ ein Zerfällungskörper von $T^n - c$ über K ist (Aufgabe 12.3).
4. Zeigen Sie, dass $L = K(\alpha)$ ist (Grade?!).

Frewillige Abgabe bis zum 9. Februar 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen