Übungen zur Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig Blatt 15 vom 9. Februar 2018

Aufgabe 1 (Auflösbarkeit durch Radikale). Sei $f \in \mathbb{Q}[T]$ ein normiertes Polynom und sei G die Galoisgruppe von f über $\mathbb{Q}$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist $|G| = 2048$, so ist f über $\mathbb{Q}$ durch Radikale auflösbar.
2. Ist $\deg f = 2048$, so ist f über $\mathbb{Q}$ durch Radikale auflösbar.

Aufgabe 2 (Triangulatur des Quadrats).

1. Zeigen Sie algebraisch, dass man aus den vier Ecken des Einheitsquadrats in $\mathbb{C}$ mit Zirkel und Lineal ein gleichseitiges Dreieck mit demselben Flächeninhalt konstruieren kann.
2. Beschreiben Sie geometrisch wie man mit Zirkel und Lineal aus den vier Ecken des Einheitsquadrats in $\mathbb{C}$ ein gleichseitiges Dreieck mit demselben Flächeninhalt konstruieren kann.

Aufgabe 3 (Winkeldreiteilung).

1. Geben Sie eine präzise Definition von „konstruierbaren Winkeln" (mit Zirkel und Lineal) und der „Konstruierbarkeit der Winkeldreiteilung mit Zirkel und Lineal".
2. Zeigen Sie: Im allgemeinen ist *nicht* für jeden mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Winkel auch die zugehörige Winkeldreiteilung mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

Aufgabe 4 (Rarität von Einheitswurzeln). Sei $L \mid \mathbb{Q}$ eine endliche Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass L nur endlich viele Einheitswurzeln enthält.
Hinweis. Was passiert mit $\varphi(n)$ für $n \to \infty$?!

Bonusaufgabe (Skript). Finden Sie so viele Fehler im Skript wie möglich!

keine Abgabe