Übungen zur Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig Blatt 2 vom 27. Oktober 2017

Aufgabe 1 (Gruppenhomomorphismen). Seien G, H Gruppen, sei $f\colon G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

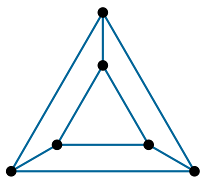
1. Ist $K \subset H$ ein Normalteiler von H, so ist das Urbild $f^{-1}(K)$ ein Normalteiler von G.
2. Ist $K \subset G$ ein Normalteiler von G, so ist $f(K)$ ein Normalteiler von H.

Aufgabe 2 (Untergruppen vom Index 2).

1. Sei G eine Gruppe und sei $H \subset G$ eine Untergruppe vom Index 2. Zeigen Sie, dass H dann bereits ein Normalteiler in G ist.
2. Äußerst nützliche (?!) Folgerung: Sei G eine Gruppe mit $|G| = 4034$. Zeigen Sie, dass alle Untergruppen von G, die mindestens 42 Elemente enthalten, Normalteiler sind.

Aufgabe 3 (S_3, anschaulich). Sei $\tau := (1\ 2) \in S_3$ und sei $\sigma := (1\ 2\ 3) \in S_3$ die Permutation, die die Elemente $1,\ 2,\ 3$ zyklisch vertauscht.

1. Zeigen Sie, dass $\{\sigma, \tau\}$ ein Erzeugendensystem von S_3 ist.
2. Beschriften Sie die Knoten des abgebildeten Graphen so, dass klar wird, dass es sich dabei um den Cayleygraphen $\operatorname{Cay}(S_3, \{\sigma, \tau\})$ handelt.



Aufgabe 4 (kleine/große symmetrische Gruppen). Sei X eine Menge.

1. Zeigen Sie: Ist X endlich, so ist S_X endlich erzeugt.
2. Zeigen Sie: Ist X unendlich, so ist S_X *nicht* endlich erzeugt.

   Hinweis. Es ist nütlzlich, sich zu überlegen, dass endlich erzeugte Gruppen (höchstens) abzählbar sind ...

Bonusaufgabe (Freiheit). Lesen Sie den Anhang über freie Gruppen im Skript.

1. Zeigen Sie, dass die Gruppen $\mathbb{Z}/2$ und $\mathbb{Z}^2$ *nicht* frei sind.
2. Sei S eine Menge. Lesen Sie die Konstruktionsskizze für die Gruppe $F(S)$ und ergänzen Sie die fehlenden Details. (Warum ist die Verknüpfung wohldefiniert? Warum handelt es sich um eine Gruppe? Warum ist diese Gruppe frei von S erzeugt?)

Abgabe bis zum 3. November 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen