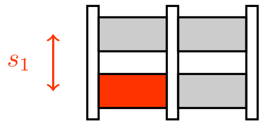
Übungen zur Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 3 vom 3. November 2017

Aufgabe 1 (Quotientengruppen). Seien G und G' Gruppen und seien $N \subset G$, $N' \subset G'$ Normalteiler in G bzw. G'. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist $N \cong N'$ und $G/N \cong G'/N'$, so folgt $G \cong G'$.
2. Ist $G \cong G'$ und $N \cong N'$, so folgt $G/N \cong G'/N'$.

Aufgabe 2 (H 31). In H 31 gibt es vier Tafeln, die unabhängig voneinander auf- und abbewegt werden können; der Einfachheit halber nehmen wir an, dass sich jede Tafel nur in zwei Positionen befinden kann, nämlich oben oder unten. Die vier Schalter an den Tafeln erlauben es, die Tafeln jeweils einzeln nach oben bzw. unten zu bewegen.



Die vier Schalter können somit durch die Elemente

$$
\begin{aligned}
s_1 &:= \bigl([1],[0],[0],[0]\bigr)\\
s_2 &:= \bigl([0],[1],[0],[0]\bigr)\\
s_3 &:= \bigl([0],[0],[1],[0]\bigr)\\
s_4 &:= \bigl([0],[0],[0],[1]\bigr)
\end{aligned}
$$

in der Gruppe $G := \prod_{j=1}^{4} \mathbb{Z}/2$ modelliert werden.

1. Zeigen Sie, dass $\{s_1+s_2+s_3+s_4, s_1+s_2+s_4, s_1+s_2, s_2\}$ ein Erzeugendensystem von G ist. Wäre dies ein praktisches Erzeugendensystem?!
2. Gibt es ein Erzeugendensystem von G, das nur drei Elemente enthält? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3 (semi-direkte Produkte). Seien N, Q Gruppen und $\varphi\colon Q \longrightarrow \operatorname{Aut}(N)$ ein Gruppenhomomorphismus.

1. Zeigen Sie, dass (e,e) das neutrale Element von $N \rtimes_\varphi Q$ ist.
2. Zeigen Sie: Ist $(n,q) \in N \rtimes_\varphi Q$, so ist $\bigl(\varphi(q^{-1})(n^{-1}), q^{-1}\bigr)$ das Inverse von (n,q) in $N \rtimes_\varphi Q$.

Aufgabe 4 (spaltende Erweiterungen).

1. Sei G eine Gruppe, sei $N \subset G$ ein Normalteiler und sei $Q := G/N$, mit kanonischer Projektion $\pi\colon G \longrightarrow G/N = Q$. Es gebe einen Gruppenhomomorphismus $s\colon Q \longrightarrow G$ mit $\pi \circ s = \mathrm{id}_Q$. Zeigen Sie: Dann gibt es einen Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon Q \longrightarrow \operatorname{Aut}(N)$ mit
$$G \cong N \rtimes_\varphi Q.$$
2. Folgern Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gibt es einen Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \operatorname{Aut}(A_n)$ mit $S_n \cong A_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2$.

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Schröder-Bernstein?!)**.** Gilt auch die gruppentheoretische Variante des Satzes von Schröder-Bernstein? Genauer: Seien G und H Gruppen und es gebe injektive Gruppenhomomorphismen $G \longrightarrow H$ und $H \longrightarrow G$; folgt dann bereits $G \cong H$?
Hinweis. Produkte?!

Bonusaufgabe (Spiegelei; für Lehrämtler (als optionale Alternative zur obigen Bonusaufgabe))**.**

1. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Isom}(\mathbb{R}^2, d_2)$ von der Menge aller Spiegelungen (an affinen Geraden) erzeugt wird.

2. Wann/Wie geht dies in den Schulunterricht ein?

Hinweis. Sie dürfen verwenden, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \rtimes_\varphi \mathrm{O}(2) &\longrightarrow \operatorname{Isom}(\mathbb{R}^2, d_2) \\ (x, A) &\longmapsto (v \mapsto A \cdot v + x) \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus ist, wobei

$$\begin{aligned} \varphi\colon\ \mathrm{O}(2) &\longrightarrow \operatorname{Aut}(\mathbb{R}^2) \\ A &\longmapsto (x \mapsto A \cdot x). \end{aligned}$$

Abgabe bis zum 10. November 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen