

Übungen zur Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig

Blatt 4 vom 10. November 2017

Aufgabe 1 (Bahnen und Stabilisatoren). Sei X eine Menge, sei G eine Gruppe, es sei eine Gruppenoperation von G auf X gegeben und es seien $x, y \in X$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist $G \cdot x = G \cdot y$, so folgt $G_x \cong G_y$.
2. Ist $G_x \cong G_y$, so folgt $G \cdot x = G \cdot y$.

Aufgabe 2 (Konjugationsoperation). Sei G eine Gruppe und sei

$$\begin{aligned} \varrho: G &\longrightarrow \text{Aut}(G) \subset S_G \\ g &\longmapsto c_g := (h \mapsto g \cdot h \cdot g^{-1}) \end{aligned}$$

(s. Aufgabe 3 von Blatt 1).

1. Zeigen Sie, dass ϱ eine Operation von G auf G definiert.
2. Sei $g \in G$. Zeigen Sie, dass der Stabilisator von g unter dieser Operation die folgende Menge ist:

$$Z_G(g) := \{h \in G \mid h \cdot g = g \cdot h\}.$$

3. Bestimmen Sie $Z_{S_3}(g)$ für alle $g \in S_3$.
4. Bestimmen Sie für jedes $g \in S_3$ die S_3 -Bahn von g unter dieser Operation von S_3 auf S_3 .

Aufgabe 3 (Triforce-Münzen). Die Zentralbank von Hyrule beschließt, Münzen in Umlauf zu bringen. Die Münzen haben die Form eines gleichseitigen Dreiecks, unterteilt in vier kongruente gleichseitige Dreiecke (Abbildung (a)).



(a)



(b)



(c)



(d)

Um verschiedene Sorten Münzen zu ermöglichen, können aus den vier Dreiecken noch Kreise oder seitenparallele Dreiecke ausgestanzt werden. Wieviele essentiell verschiedene solcher Münzen gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort!

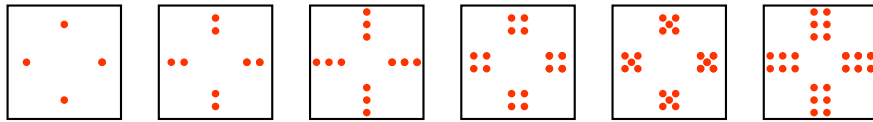
Hinweis. Die Münzen in Abbildung (b) und (c) sind essentiell verschieden, aber die Münzen in Abbildung (c) und (d) *nicht*.

Aufgabe 4 (Fixpunktnonsens). Sei X eine Menge, sei G eine Gruppe und es sei eine Gruppenoperation von G auf X gegeben. Ein Element $x \in X$ ist ein *Fixpunkt* dieser Operation, wenn $g \cdot x = x$ für alle $g \in G$ gilt.

1. Zeigen Sie: Ist $|G| = 77$ und $|X| = 20$, so besitzt diese Operation mindestens zwei Fixpunkte.
2. Zeigen Sie: Ist $|G| = 77$ und $|X| = 37$, so besitzt diese Operation mindestens einen Fixpunkt.

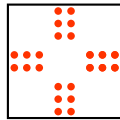
Bitte wenden

Bonusaufgabe (Würfel). Ein Casino-Betreiber verwendet Würfel, bei denen jede Seite mit einem der folgenden Symbole dekoriert ist:



Dabei können manche Symbole auch auf mehreren Seiten vorkommen (und andere Symbole dafür gar nicht).

1. Wieviele essentiell verschiedene solcher Würfel gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort!
2. Wieviele essentiell verschiedene solcher Würfel gibt es, wenn jeder Würfel höchstens auf einer Seite das Symbol



enthalten darf? Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis. Die relevante Gruppe enthält genau 24 Elemente.