

Übungen zur Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig

Blatt 5 vom 17. November 2017

Aufgabe 1 (Zykelsalat). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Die Menge $\{(5\ 1), (7\ 1\ 3\ 4\ 2\ 5\ 6)\}$ ist ein Erzeugendensystem von S_7 .
2. Die Menge $\{(5\ 1\ 2), (7\ 1\ 3\ 4\ 2\ 5\ 6)\}$ ist ein Erzeugendensystem von S_7 .

Aufgabe 2 (endliche abelsche Gruppen). Seien $p, q \in \mathbb{N}$ Primzahlen mit $p \neq q$.

1. Bestimmen Sie ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen abelscher Gruppen A mit $|A| = p^2 \cdot q^2$.
2. Zeigen Sie, dass jede abelsche Gruppe A mit $|A| = p^2 \cdot q^2$ ein zweielementiges Erzeugendensystem besitzt.

Aufgabe 3 (Zykelzerlegung). Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Gibt es einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z}/10 \rightarrow S_7$?
2. Gibt es einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z}/8 \rightarrow S_7$?

Aufgabe 4 (14/15-Puzzle). Beim 14/15-Puzzle sind fünfzehn nummerierte Plättchen und eine „Lücke“ auf einem quadratischen Brett verteilt (siehe linke Abbildung). Modellieren Sie die Situation geeignet in S_{16} und zeigen Sie mithilfe des Signums, dass es *nicht* möglich ist, durch Verschieben der Plättchen die Position in der rechten Abbildung zu erreichen.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Bonusaufgabe (GAP). Das System GAP und Dokumentation dazu finden Sie unter: <https://www.gap-system.org/>. Geben Sie bei den folgenden Aufgaben den GAP-Code und gegebenenfalls die Ausgabe von GAP an.

1. Verwenden Sie das Computeralgebrasystem GAP, um die Menge aller Konjugationsklassen von Elementen in S_8 zu bestimmen.
 2. Verwenden Sie das Computeralgebrasystem GAP, um herauszufinden, wieviele Untergruppen die Gruppe S_8 besitzt.
 3. Wie kann man mit GAP die Zykelzerlegung eines Elements in einer endlichen symmetrischen Gruppe bestimmen?
 4. Wie kann man mit GAP herausfinden, ob eine Teilmenge einer endlichen symmetrischen Gruppe ein Erzeugendensystem dieser Gruppe ist?
-

Abgabe bis zum 24. November 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen