

Übungen zur Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig

Blatt 6 vom 24. November 2017

Aufgabe 1 (Sylowlogie). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Es gibt eine einfache Gruppe G mit $|G| = 42$.
2. Jede Gruppe G mit $|G| = 200$ ist auflösbar.

Aufgabe 2 (Diedergruppen).

1. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Zeigen Sie, dass $[D_n, D_n]$ zyklisch ist. Wieviele Elemente enthält diese Gruppe?
2. Bestimmen Sie alle 2-Sylowgruppen und alle 3-Sylowgruppen in D_6 und skizzieren Sie die entsprechenden Isometrien eines regulären Sechsecks.

Aufgabe 3 (Primquadrate).

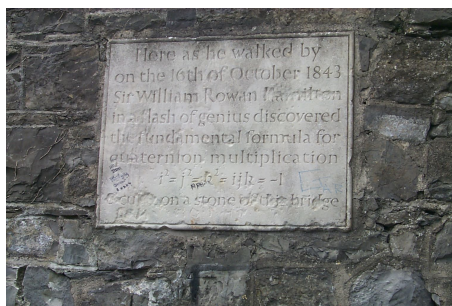
1. Zeigen Sie: Ist G eine Gruppe, für die $G/Z(G)$ zyklisch ist, so ist G abelsch.
2. Folgern Sie: Ist G eine Gruppe und $p \in \mathbb{N}$ prim mit $|G| = p^2$, so ist G abelsch.

Aufgabe 4 (1001 Nacht und die Wilde 13). Sei G eine Gruppe mit $|G| = 1001$. Zeigen Sie, dass es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow \mathbb{Z}/13$ gibt.

Hinweis. Sylow!

Bonusaufgabe (Quaternionen).

1. Wie sind die Quaternionen definiert?
2. Welche algebraischen Eigenschaften besitzen die Quaternionen?
3. Geben Sie eine Verknüpfungstabelle für die (acht-elementige) Quaternionengruppe an.



Abgabe bis zum 1. Dezember 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen