Übungen zur Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig Blatt 7 vom 1. Dezember 2017

Aufgabe 1 (Funktionenringe)**.** Sei $R := C([0,1], \mathbb{R})$ der Ring der stetigen Funktionen $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ (bezüglich punktweiser Addition und Multiplikation). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Die Abbildung $\int_0^1 \; dx \colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ ist ein Ringhomomorphismus.
2. Die Menge $\{f \in R \mid \forall_{n \in \{0,1\}} \quad f(n) = 0\}$ ist ein Ideal in R.

Aufgabe 2 (vierte Potenzen)**.**

1. Bestimmen Sie alle vierten Potenzen in $\mathbb{Z}/(8)$.
2. Folgern Sie, dass die Gleichung
$$x^{2020} - y^{44} - x^{2016} \cdot y^{200} - 88 \cdot x \cdot y^{2017} \cdot z = 555556$$
keine Lösungen $x, y, z \in \mathbb{Z}$ besitzt.

Aufgabe 3 (Körper)**.**

1. Zeigen Sie: Ist R ein endlicher Integritätsring, so ist R bereits ein Körper.
Hinweis. Injektive Selbstabbildungen einer endlichen Menge sind bereits surjektiv.
2. Zeigen Sie: Ein Ring $R \not\cong \{0\}$ ist genau dann ein Körper, wenn $\{0\}$ und R die einzigen Ideale von R sind.

Aufgabe 4 (Ringe mit $p \cdot q$ Elementen)**.** Seien $p, q \in \mathbb{N}$ prim mit $p \neq q$ und sei R ein Ring mit $|R| = p \cdot q$. Zeigen Sie, dass R zu $\mathbb{Z}/(p) \times \mathbb{Z}/(q)$ isomorph ist.
Hinweis. Wie sieht die unterliegende additive Gruppe aus? Was liefert das Distributivgesetz? Welche Produkte von Elementen muss man also nur kennen? Was liefert das multiplikative neutrale Element?

Bonusaufgabe (Nikolausaufgabe)**.** Alle Jahre wieder lässt sich der Nikolaus auf ein Wettrennen mit seinem grazilen Rentier Ruprecht ein.

Ruprecht legt pro Schritt einen Meter zurück, der Nikolaus – trotz des viel zu langen Barts – hingegen beeindruckende eineinhalb Meter; jedoch kann der etwas füllige Nikolaus in der Zeit, in der Ruprecht drei Schritte tänzelt, nur zwei Schritte gehen.

Ruprecht schlägt für dieses Jahr folgende Streckenführung vor: Vom Haus des Nikolaus bis zum hundert Meter entfernten Pool und wieder zurück.

Wer wird gewinnen? Warum?

Abgabe bis zum 8. Dezember 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen