Übungen zur Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig Blatt 8 vom 8. Dezember 2017

Aufgabe 1 (komplexe Zahlen?!)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gilt $\mathbb{R}[T]/(T^2+1) \cong \mathbb{C}$.
2. Es ist $\mathbb{F}_7[T]/(T^2+1)$ ein Körper.

Aufgabe 2 (Adventskalender)**.** Über die Adventszeit auf dem Planeten Blorx ist folgendes bekannt:

- Fertigt man einen Adventskalender mit 93er-Reihen, so benötigt man zusätzlich eine Reihe mit 57 Türchen.
- Fertigt man einen Adventskalender mit 112er-Reihen, so benötigt man zusätzlich eine Reihe mit 98 Türchen.
- Die blorxische Adventszeit ist länger als ein Blorxmonat, aber kürzer als ein Blorxjahr.

Ein Blorxjahr hat bekannterweise 8888 Tage, ein Blorxmonat hat 888 Tage.

1. Modellieren Sie diese Situation durch geeignete Restklassenringe.
2. Wie lange dauert die blorxische Adventszeit? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3 (gaußsche Primzahlen)**.** Wir betrachten die *Normabbildung*

$$\begin{aligned} N\colon \mathbb{Z}[i] &\longrightarrow \mathbb{N} \\ z &\longmapsto |z|^2 = z \cdot \overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 \end{aligned}$$

auf den gaußschen ganzen Zahlen $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$.

1. Bestimmen Sie mithilfe von N die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}[i]$.
2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[i]$ ein euklidischer Ring bezüglich der euklidischen Gradfunktion N ist.
3. Zeigen Sie: Ist $p \in \mathbb{Z}[i]$ ein Element, für das $N(p)$ prim in $\mathbb{Z}$ ist, so ist p bereits prim in $\mathbb{Z}[i]$.
4. Ist $10 - 29 \cdot i$ prim in $\mathbb{Z}[i]$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4 (reelle Zahlen)**.** Sei Q die Menge aller Cauchyfolgen mit Folgengliedern in $\mathbb{Q}$ und sei $N \subset Q$ die Menge aller Nullfolgen. Dann bildet Q einen Ring bezüglich gliedweiser Addition bzw. Multiplikation.

1. Zeigen Sie, dass N ein maximales Ideal in Q ist.
2. Folgern Sie, dass der Restklassenring Q/N ein Körper ist und geben Sie einen injektiven Ringhomomorphismus $\mathbb{Q} \longrightarrow Q/N$ an.

Auf diese Weise kann man $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ konstruieren!

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Kreis-Ring). Wir betrachten den Ring

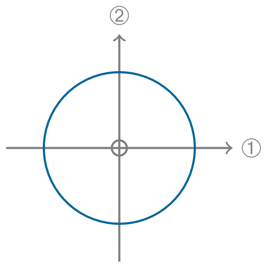
$$R := \mathbb{C}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$$

zur Kreisgleichung „$x^2 + y^2 = 1$“.

1. Zeigen Sie, dass $R \cong \mathbb{C}[T, T^{-1}]$. Dabei bezeichnet $\mathbb{C}[T, T^{-1}]$ den Unterring von $\mathbb{C}(T)$, der von $\mathbb{C}[T]$ und $1/T$ erzeugt wird.

2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}[T, T^{-1}] \not\cong \mathbb{C}[T]$ und folgern Sie $R \not\cong \mathbb{C}[T]$.

   Hinweis. Einheiten!



Abgabe bis zum 15. Dezember 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen