

Fingerübungen zur Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig

Blatt 10 vom 8. Januar 2018

Aufgabe 1 (Irreduzibilität, konkret). Welche der folgenden Polynome sind irreduzibel?

1. $T^2 - 2$ in $\mathbb{F}_3[T]$
2. $T^3 + 2 \cdot T + 1$ in $\mathbb{Z}[T]$
3. $T^{2018} + 2017 \cdot T^{2017} - 2017 \in \mathbb{Z}[T]$
4. $5 \cdot T^3 + 555 \cdot T^2 - 555555 \cdot T + 2019 \in \mathbb{Z}[T]$
5. $\frac{1}{2} \cdot T^3 + 1 \in \mathbb{Q}[T]$

Aufgabe 2 (Irreduzibilität, abstrakt). Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. Jedes irreduzible Polynom in $\mathbb{Z}[T]$ ist auch irreduzibel in $\mathbb{Q}[T]$.
2. Jedes Polynom in $\mathbb{Z}[T]$, das in $\mathbb{Q}[T]$ irreduzibel ist, ist auch irreduzibel in $\mathbb{Z}[T]$.
3. Jedes irreduzible Polynom in $\mathbb{Q}[T]$ ist auch irreduzibel in $\mathbb{Q}(T)$.
4. Jedes Polynom in $\mathbb{Q}[T]$, das in $\mathbb{Q}(T)$ irreduzibel ist, ist auch in $\mathbb{Q}[T]$ irreduzibel.

Aufgabe 3 (Restklassenringe). Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. Ist $p \in \mathbb{Z}[T]$ prim, so ist $\mathbb{Z}[T]/(p)$ ein Körper.
2. Ist $p \in \mathbb{Q}[T]$ prim, so ist $\mathbb{Q}[T]/(p)$ ein Körper.
3. Ist $p \in \mathbb{Q}[X, Y]$ prim, so ist $\mathbb{Q}[X, Y]/(p)$ ein Körper.
4. Ist $p \in \mathbb{F}_2[T]$ prim, so ist $\mathbb{F}_2[T]/(p)$ isomorph zu $\mathbb{F}_2(T)$.

Aufgabe 4 (Wiederholung). Schreiben Sie eine Übersicht/Zusammenfassung von Kapitel 2.2; orientieren Sie sich dabei an den folgenden Fragen:

1. Was bedeutet „prim“ und „irreduzibel“? Was sind Primideale, maximale Ideale? Warum sind diese Begriffe so definiert, wie sie definiert sind?
2. Welche Beispiele für Primelemente, irreduzible Elemente, Primideale, maximale Ideale kennen Sie? Wozu verwendet man diese?
3. Was sind grundlegende Sätze und Beweismethoden?
4. Wie kann man testen, ob Polynome irreduzibel sind? Wie kann man testen, ob Ideale prim bzw. maximal sind?
5. Was besagt der kleine Satz von Fermat? Wozu verwendet man ihn?

Alles, was Sie jetzt sicher beherrschen, müssen Sie nicht mühsam vor der Klausur unter Zeitdruck lernen . . .

keine Abgabe!