

Fingerübungen zur Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig

Blatt 12 vom 22. Januar 2018

Aufgabe 1 (algebraische Erweiterungen). Welche der folgenden Körpererweiterungen (in $\mathbb{C} \mid \mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{C}(T) \mid \mathbb{Q}$) sind algebraisch?

$$\mathbb{Q}(\zeta_{2020}) \mid \mathbb{Q}(i), \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \mid \mathbb{Q}(\sqrt{3}), \quad \mathbb{C}(T) \mid \mathbb{Q}, \quad \mathbb{C}(T) \mid \mathbb{R}(T).$$

Aufgabe 2 (Zerfällungskörper).

1. Ist $\mathbb{Q}(\sqrt[2018]{2017}) \subset \mathbb{C}$ ein Zerfällungskörper von $T^{2018} - 2017$ über \mathbb{Q} ?
2. Ist $\mathbb{Q}(\zeta_2) \subset \mathbb{C}$ ein Zerfällungskörper von $T^4 - 1$ über \mathbb{Q} ?
3. Ist $\mathbb{Q}(\zeta_4) \subset \mathbb{C}$ ein Zerfällungskörper von $T^2 - 1$ über \mathbb{Q} ?
4. Ist $\mathbb{Q}(\zeta_3, \zeta_6) \subset \mathbb{C}$ ein Zerfällungskörper von $(T^3 - 1) \cdot (T^6 - 1)$ über \mathbb{Q} ?
5. Ist $\mathbb{Q}(\zeta_6) \subset \mathbb{C}$ ein Zerfällungskörper von $(T^3 - 1) \cdot (T^6 - 1)$ über \mathbb{Q} ?
6. Ist $\mathbb{R}(\zeta_3) \subset \mathbb{C}$ ein Zerfällungskörper von $T^3 - 2$ über \mathbb{R} ?
7. Ist $\mathbb{F}_3[T]/(T^2 + 1)$ ein Zerfällungskörper von $T^2 + 1$ über \mathbb{F}_3 ?
8. Ist \mathbb{F}_7 ein Zerfällungskörper von $T^3 - 1$ über \mathbb{F}_7 ?

Aufgabe 3 (Konjugationsprinzip für algebraische Zahlen). Wir betrachten den Zwischenkörper $K := \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2018}, i, \zeta_5)$ von $\mathbb{C} \mid \mathbb{Q}$. Sei $\sigma \in \text{Gal}(K, \mathbb{Q})$. Welche der folgenden Gleichungen sind möglich?

1. $\sigma(\sqrt[5]{2018}) = -i$
2. $\sigma(i) = -i$
3. $\sigma(\zeta_5) = -\zeta_5$
4. $\sigma(\zeta_5) = \zeta_5^4$

Aufgabe 4 (Wiederholung). Schreiben Sie eine Übersicht/Zusammenfassung von Kapitel 3.2; orientieren Sie sich dabei an den folgenden Fragen:

1. Was sind die grundlegenden Begriffe über Körpererweiterungen?
2. Welche Beispiele für Körpererweiterungen bzw. Konstruktionen von Körpererweiterungen kennen Sie? Wozu verwendet man diese? Was wissen Sie über die zugehörigen Galoisgruppen?
3. Was sind grundlegende Sätze und Beweismethoden?
4. Wie gehen die Erkenntnisse aus der Gruppen- und Ringtheorie dabei ein?

Alles, was Sie jetzt sicher beherrschen, müssen Sie nicht mühsam vor der Klausur unter Zeitdruck lernen ...

keine Abgabe!