

Fingerübungen zur Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig

Blatt 13 vom 29. Januar 2018

Aufgabe 1 (algebraischer Abschluss).

1. Ist $\mathbb{Q}(i) \mid \mathbb{Q}$ ein algebraischer Abschluss von \mathbb{Q} ?
2. Ist $\mathbb{R} \mid \mathbb{Q}$ ein algebraischer Abschluss von \mathbb{Q} ?
3. Ist $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2}) \mid \mathbb{Q}$ ein algebraischer Abschluss von \mathbb{Q} ?
4. Ist $\mathbb{C} \mid \mathbb{Q}(i)$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q}(i)$?
5. Ist $\mathbb{C}(T) \mid \mathbb{Q}(T)$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q}(T)$?
6. Ist $\mathbb{C} \mid \mathbb{C}$ ein algebraischer Abschluss von \mathbb{C} ?

Aufgabe 2 (\mathbb{F}_4). Bestimmen Sie die Verknüpfungstabellen für Addition und Multiplikation auf \mathbb{F}_4 .

Hinweis. Überlegen Sie sich zunächst eine geeignete Beschreibung der Elemente von $\mathbb{F}_4 \cong \mathbb{F}_2[T]/(T^2 + T + 1)$.

Aufgabe 3 (\mathbb{F}_{16}). Beantworten Sie die folgenden Fragen mithilfe des Klassifikationsatzes für endliche Körper:

1. Wie kann man \mathbb{F}_{16} aus \mathbb{F}_2 konstruieren?
2. Wie sieht der Frobeniusendomorphismus $\sigma: \mathbb{F}_{16} \rightarrow \mathbb{F}_{16}$ in dieser Beschreibung aus?
3. Warum besitzt $\mathbb{F}_{16} \mid \mathbb{F}_2$ genau einen Zwischenkörper K mit $|K| = 4$?
4. Welche Potenzen von σ liegen in $\text{Gal}(\mathbb{F}_{16}, K)$?
5. Warum besitzt $\mathbb{F}_8 \mid \mathbb{F}_2$ *keinen* Zwischenkörper K mit $|K| = 4$?

Aufgabe 4 (Wiederholung). Schreiben Sie eine Übersicht/Zusammenfassung von Kapitel 3.3; orientieren Sie sich dabei an den folgenden Fragen:

1. Welche Klassifikationsresultate gibt es für endliche Körper bzw. endliche Körpererweiterungen von endlichen Körpern?
2. Welche Konstruktionsprinzipien kennen Sie für endliche Körper?
3. Wie können Sie möglichst explizit mit endlichen Körpern rechnen?
4. Wie gehen die Erkenntnisse aus der Gruppen- und Ringtheorie dabei ein?

Alles, was Sie jetzt sicher beherrschen, müssen Sie nicht mühsam vor der Klausur unter Zeitdruck lernen . . .

keine Abgabe!