

Fingerübungen zur Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig

Blatt 2 vom 30. Oktober 2017

Aufgabe 1 (symmetrische Gruppen).

1. Bestimmen Sie alle Normalteiler von S_3 .
2. Bestimmen Sie die zugehörigen Quotientengruppen.
3. Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$, für die die Gruppe S_n zyklisch ist.

Aufgabe 2 (Normalteilerbuchhaltung). Sei G eine endliche Gruppe und sei $N \subset G$ ein Normalteiler mit $N \neq \{e\}$ und $N \neq G$. Welche der folgenden Situationen können eintreten?

1. $|G| = |N| \cdot |N|$
2. $|G| = |N| \cdot |G/N| \cdot |G/N|$
3. $G/N \cong G$
4. $G/N \cong N$
5. $|G| = |N| + |G/N|$
6. $|G/N| = |G| + |N|$

Aufgabe 3 (Quotientengruppen und Gruppenhomomorphismen). Welche der folgenden Abbildungen sind wohldefinierte Gruppenhomomorphismen?

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}/2 &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [n] &\longmapsto n \\ \mathbb{Z}/2 &\longrightarrow \mathbb{Z}/2 \\ [n] &\longmapsto [n^2] \\ S_3/A_3 &\longrightarrow \mathbb{Z}/2 \\ [\sigma] &\longmapsto [\text{sgn}(\sigma) + 1] \\ S_3/A_3 &\longrightarrow \mathbb{Z}/3 \\ [\sigma] &\longmapsto [\sigma(1)]\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Matrixgruppen).

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Bildet die Menge der invertierbaren Matrizen in $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ in Jordan-Normalform einen Normalteiler in $\text{GL}_n(\mathbb{C})$?
2. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wie kann man aus dem Gauß-Algorithmus ein Erzeugendensystem für $\text{GL}_n(K)$ extrahieren?

keine Abgabe!