Fingerübungen zur Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig Blatt 3 vom 6. November 2017

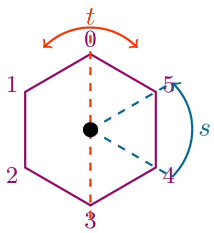
Aufgabe 1 (Produkte). Untersuchen Sie für alle Gruppen G und H aus der folgenden Liste, ob es einen injektiven Gruppenhomomorphismus $G \longrightarrow H$ gibt:

$$\mathbb{Z}/2, \quad \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3, \quad S_3, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

Aufgabe 2 (semi-direkte Produkte). Seien N, Q Gruppen, sei $\varphi\colon Q \longrightarrow \operatorname{Aut}(N)$ ein Gruppenhomomorphismus und seien $n \in N$, $q \in Q$. Vereinfachen Sie die folgenden Terme in $N \rtimes_\varphi Q$:

1. $(n, e) \cdot (e, q)$
2. $(e, q) \cdot (n, e)$
3. $(n, q) \cdot (n^{-1}, q^{-1})$
4. $(n, q)^3$

Aufgabe 3 (Isometrien des regulären Sechsecks). Wir betrachten ein reguläres Sechseck X in $(\mathbb{R}^2, d_2)$, dessen Ecken rundherum mit $0, \dots, 5$ durchnumeriert sind. Sei $s \in \operatorname{Isom}(X, d_2)$ die Rotation um $2 \cdot \pi/6$ (um den Mittelpunkt von X, gegen den Uhrzeigersinn) und sei $t \in \operatorname{Isom}(X, d_2)$ die Spiegelung an der Diagonalen durch die Ecken 0 und 3:



1. Beschreiben Sie die folgenden Kompositionen geometrisch auf möglichst einfache Weise:
$$s^2, \quad s^3, \quad s^6, \quad s^{11}, \quad s \circ t, \quad t \circ s, \quad t \circ s \circ t^{-1}.$$
2. Wie kann man die Spiegelung an der Diagonalen durch 2 und 5 als Komposition von s und t ausdrücken?

Aufgabe 4 (universelle Eigenschaften).

1. An welche universellen Eigenschaften können Sie sich aus der Linearen Algebra erinnern?
2. Finden Sie eine universelle Eigenschaft für semi-direkte Produkte!

   Hinweis. Obwohl semi-direkte Produkte Varianten von Produkten sind, hat ihre universelle Eigenschaft etwas mit Homomorphismen *aus* semi-direkten Produkten *heraus* zu tun.

---

keine Abgabe!