Klausur zur Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig 16. Februar 2018

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	9	9	9	9	9	9	6	60
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3 + 3 + 3 = 9 Punkte). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Für jede Gruppe G gilt
$$\forall_{g\in G} \quad \exists_{h\in G} \quad g \cdot h^2 = g^{-1}.$$

2. Für jeden Gruppenhomomorphismus $f\colon G \longrightarrow H$ ist $\{g \in G \mid f(g)^2 = e\}$ ein Normalteiler in G.

3. Ist G eine Gruppe, so gibt es eine freie Gruppenoperation von G auf der Menge G.

Aufgabe 2 (3 + 3 + 3 = 9 Punkte). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Das Polynom $T^{2018} - 18 \cdot T^3 + 21 \in \mathbb{Z}[T]$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[T]$.
2. Sind $a, b \subset \mathbb{Z}$ Ideale, so gilt $\mathbb{Z}/a \cong \mathbb{Z}/b$.
3. Jeder Restklassenring von $\mathbb{Q}[X, Y]$ ist ein Integritätsring.

Aufgabe 3 (3 + 3 + 3 = 9 Punkte). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Sind K und L endliche Körper mit $|K| = |L|$, so folgt $K \cong L$.
2. Es gibt einen Körper K, so dass die Einheitengruppe $K^\times$ eine Untergruppe enthält, die isomorph zu $\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/9$ ist.
3. Jede endliche Körpererweiterung ist eine Galoiserweiterung.

Aufgabe 4 ($3 + 3 + 1 + 2 = 9$ Punkte)**.**

1. Formulieren Sie den kleinen Satz von Fermat.
2. Beweisen Sie den kleinen Satz von Fermat.
3. Nennen Sie eine Anwendung des kleinen Satzes von Fermat.
4. Wie ist der Frobeniusendomorphismus definiert? Nennen Sie außerdem einen Zusammenhang mit dem kleinen Satz von Fermat!

Aufgabe 5 (3 + 3 + 3 = 9 Punkte). Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit

$$(\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) \cdot (\alpha^2 + 2) = 0.$$

1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}) = \mathbb{Q}$ ist.
2. Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha) \mid \mathbb{Q}$ normal ist.
3. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha), \mathbb{Q})$ auflösbar ist.

Aufgabe 6 (3 + 3 + 3 = 9 Punkte)**.** Sei $L \mid K$ eine endliche Galoiserweiterung, sei $G := \mathrm{Gal}(L, K)$ und es gelte $|G| = 63$.

1. Zeigen Sie, dass es ein Element in L gibt, dessen Minimalpolynom (über K) den Grad 63 besitzt.
2. Seien M und M' Zwischenkörper von $L \mid K$ mit $[M : K] = 7 = [M' : K]$. Zeigen Sie: Dann gilt $\mathrm{Gal}(L, M) \cong \mathrm{Gal}(L, M')$.
3. Bestimmen Sie die Anzahl der 7-Sylowgruppen von G.

Aufgabe 7 (6 Punkte). Sei $L \mid \mathbb{Q}$ eine endliche Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass $L \mid \mathbb{Q}$ nur endlich viele Zwischenkörper besitzt.