Wiederholungsklausur zur Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — 4. April 2018

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

– Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.

– Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

– Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

– Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.

– Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.

– Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	9	9	9	9	9	9	6	60
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3 + 3 + 3 = 9 Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Für jede Gruppe G gilt
$$\forall_{g \in G} \quad \exists_{h \in G} \quad h \cdot g \cdot h^{-1} = g^{-1}.$$
2. Für jeden Gruppenhomomorphismus $f\colon G \longrightarrow H$ ist $\operatorname{im} f \cong \ker f$.
3. Die Gruppe $S_3 \times S_3$ ist auflösbar.

Aufgabe 2 ($3+3+3=9$ **Punkte**). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Das Polynom $T^{2018} - 4 \cdot T^{1009} + 4 \in \mathbb{Z}[T]$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[T]$.
2. Ist R ein Hauptidealring, so ist auch $R[T]$ ein Hauptidealring.
3. Es gibt ein irreduzibles Polynom $f \in \mathbb{Q}[X,Y]$ mit $\mathbb{Q}[X,Y]/(f) \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Aufgabe 3 (3 + 3 + 3 = 9 Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Es gibt eine transzendente Körpererweiterung über $\mathbb{F}_{17}$.
2. Ist K ein endlicher Körper, so ist die additive Gruppe $(K, +)$ zyklisch.
3. Jede separable Körpererweiterung ist eine Galoiserweiterung.

Aufgabe 4 ($2+3+3+1=9$ Punkte)**.**

1. Wie lautet die Definition des Zentrums einer Gruppe? Wie lautet die Definition des Zentralisators eines Gruppenelements?

2. Formulieren Sie die Klassengleichung.

3. Wie beweist man die Klassengleichung?

4. Nennen Sie eine Anwendung der Klassengleichung.

Aufgabe 5 (3 + 3 + 3 = 9 Punkte)**.** Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit

$$(\alpha^5 + 3 \cdot \alpha^4 - 99 \cdot \alpha - 33)^2 = 0.$$

1. Zeigen Sie, dass $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 5$.
2. Zeigen Sie: Es gibt *keinen* Körperhomomorphismus $\mathbb{Q}(\alpha) \longrightarrow \mathbb{Q}(\zeta_{10})$.
3. Zeigen Sie: Es gibt einen Zwischenkörper M von $\mathbb{C} \mid \mathbb{Q}(\alpha)$, so dass die Erweiterung $M \mid \mathbb{Q}$ normal ist und $[M : \mathbb{Q}] \leq 120$ gilt.

Aufgabe 6 ($3 + 3 + 3 = 9$ **Punkte**)**.** Sei $L \mid K$ eine endliche Galoiserweiterung, sei $G := \mathrm{Gal}(L, K)$ und es gelte $|G| = 99$.

1. Bestimmen Sie die Anzahl der 3-Sylowgruppen von G.
2. Zeigen Sie, dass G auflösbar ist.
3. Zeigen Sie: Es gibt mindestens elf verschiedene Elemente in L, deren Minimalpolynome über K den Grad 11 besitzen.

Aufgabe 7 (6 Punkte). Zeigen Sie, dass es eine Galoiserweiterung $L \mid \mathbb{Q}$ mit $\mathrm{Gal}(L, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/5$ gibt.

Hinweis. ζ_{11}