Probeklausur zur Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig 9. Februar 2018

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

– Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.

– Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

– Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

– Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.

– Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.

– Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	9	9	9	9	9	9	6	60
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 ($3+3+3=$ 9 Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Für jede Gruppe G gilt
$$\forall_{g,h\in G} \quad g\cdot h\cdot g^{-1}=h.$$

2. Für jeden Gruppenhomomorphismus $f\colon G\longrightarrow H$ gibt es einen Normalteiler $N\subset G$ mit
$$\forall_{g,h\in G} \quad g\cdot N=h\cdot N \Longleftrightarrow f(g)=f(h).$$

3. Die Gruppe $S_6\times \mathbb{Z}/6$ ist auflösbar.

Aufgabe 2 ($3+3+3=9$ **Punkte**). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Das Polynom $T^3 + 2017 \cdot T^2 + 2018 \cdot T + 2019 \in \mathbb{Z}[T]$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[T]$.
2. Jedes Ideal $a \subset \mathbb{Z}$ mit $5 \in a$ und $a \neq \mathbb{Z}$ ist maximal.
3. Es gibt ein Ideal $a \subset \mathbb{Q}[T]$ mit $\mathbb{Q}[T]/a \cong \mathbb{F}_5$.

Aufgabe 3 ($3+3+3=9$ **Punkte**). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Der Körper $\mathbb{F}_{1024}$ ist algebraisch abgeschlossen.
2. Es gibt einen Körper K mit $K^\times \cong \mathbb{Z}/17$.
3. Jede separable Körpererweiterung ist endlich.

Aufgabe 4 ($1 + 6 + 1 + 1 = 9$ Punkte)**.**

1. Wie lautet die Definition normaler Körpererweiterungen?
2. Formulieren Sie den Hauptsatz der Galoistheorie.
3. Nennen Sie ein Resultat, das im Beweis des Hauptsatzes der Galoistheorie eine wesentliche Rolle spielt.
4. Nennen Sie eine Anwendung des Hauptsatzes der Galoistheorie.

Aufgabe 5 ($2 + 3 + 2 + 2 = 9$ Punkte). Sei $f := T^4 - 2 \in \mathbb{Q}[T]$.

1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[T]/(f)$ ein Körper ist.
2. Sei L ein Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass $[L : \mathbb{Q}] = 8$.
3. Bestimmen Sie die Anzahl der Körperhomomorphismen $L \longrightarrow \mathbb{C}$.
4. Zeigen Sie, dass die Operation der Galoisgruppe von f über $\mathbb{Q}$ auf der Menge der Nullstellen von f in L *nicht* frei ist.

Aufgabe 6 ($3+3+3=9$ Punkte)**.** Sei $L \mid K$ eine endliche Galoiserweiterung, sei $G := \mathrm{Gal}(L, K)$ und es gelte $|G| = 44$.

1. Bestimmen Sie die Anzahl der 11-Sylowgruppen von G.
2. Zeigen Sie, dass es einen Epimorphismus $G \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ gibt.
3. Zeigen Sie: Es gibt einen Zwischenkörper M von $L \mid K$ mit $[M : K] = 2$.

Aufgabe 7 (6 Punkte). Seien $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $\operatorname{ggT}(m, n) = 1$ und $\zeta_n := e^{2\pi i/n}$, $\zeta_m := e^{2\pi i/m} \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$\big[\mathbb{Q}(\zeta_n, \zeta_m) : \mathbb{Q}\big] = \big[\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}\big] \cdot \big[\mathbb{Q}(\zeta_m) : \mathbb{Q}\big].$$

Hinweis. Zeigen Sie zunächst $\mathbb{Q}(\zeta_n, \zeta_m) = \mathbb{Q}(\zeta_{n\cdot m})$. Warum hilft das?