

Algebra: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann

Blatt 1 vom 17. Oktober 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Wiederholung: Lineare Algebra). Welche Beispiele von Gruppen kennen Sie aus der Linearen Algebra? Wozu wurden sie verwendet?

Fingerübung B (Wiederholung: Aufschreiben). Wie schreibt man Voraussetzungen, Behauptungen, Beweise, Beispiele, Berechnungen, Lösungen von Gleichungen sauber auf? Wo verwendet man Konjunktiv, wo Indikativ?

Fingerübung C (Quadrate). Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr?

1. Ist $g \in G$ mit $g \cdot g = g$, so folgt $g = e$.
2. Ist $g \in G$ mit $g \cdot g = e$, so folgt $g = e$.

Fingerübung D (Linksnebenklassen). Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe und sei $H \subset G$ eine Untergruppe.

1. Wiederholen Sie den Begriff *Äquivalenzrelation*.
2. Zeigen Sie, dass folgendes eine Äquivalenzrelation auf G definiert:

$$\sim_H := \{(g, g') \in G \times G \mid g^{-1} \cdot g' \in H\}$$

3. Zeigen Sie: Für alle $g \in G$ ist $g \cdot H = \{g' \in G \mid g \sim_H g'\}$.
4. Was ist die entsprechende Situation bei Vektorräumen?

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (Verknüpfungstabellen; 4 = (2+2) Punkte).

1. Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe. Zeigen Sie: Für jedes $g \in G$ ist die folgende Abbildung bijektiv:

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto g \cdot h \end{aligned}$$

2. Folgern Sie: Die untenstehende Verknüpfungstabelle definiert *keine* Gruppenstruktur auf $\{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$:

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Monoide und Gruppen; 4 = (2+2) Punkte). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Die Menge $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ bildet bezüglich der gewöhnlichen Multiplikation und 1^2 einen Monoid.
2. Die Menge $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ bildet bezüglich der gewöhnlichen Multiplikation und $1/1$ eine Gruppe.

Aufgabe 3 (aabbellsscchh; 4 Punkte). Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe mit

$$\forall_{g \in G} \quad g \cdot g = e.$$

Zeigen Sie, dass die Gruppe $(G, \cdot, e)$ abelsch ist.

Hinweis. Wenn Sie es geschickt anstellen, lässt sich das sehr schön in einer einzelnen Zeile (normaler Länge ...) beweisen!

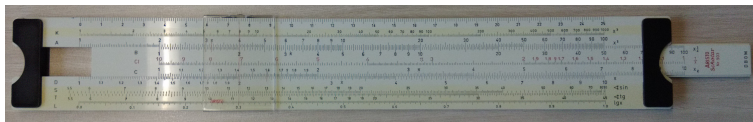
Aufgabe 4 (Konjugation; 4 = (2+2) Punkte). Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe.

1. Zeigen Sie: Ist $g \in G$, so ist die folgende Abbildung ein Automorphismus von G :

$$\begin{aligned} c_g: G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto g \cdot h \cdot g^{-1}. \end{aligned}$$

2. Folgern Sie: Ist $\text{Aut}(G) = \{\text{id}_G\}$, so ist G abelsch.

Bonusaufgabe (Rechenschieber; 4 Punkte). Wie funktionieren Rechenschieber? Was hat das mit dem Gruppenisomorphismus $\exp: (\mathbb{R}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1)$ zu tun?



Hinweis. Die Bonusaufgaben sind ein freiwilliges Zusatzangebot, sind oft manchmal komplexer oder aufwendiger bzw. basieren auf Material oder Fähigkeiten, die über die Vorlesung und die Übungen hinausgehen. Diese Aufgaben werden nicht in den Übungsgruppen besprochen. Sie dienen einfach nur als zusätzliche Anregung und Herausforderung. Man kann sich also gerne die Zähne daran ausbeißen oder sie fröhlich ignorieren.