Algebra: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 10 vom 19. Dezember 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Wiederholung: irreduzibel, prim, maximal)**.** Wieder holen Sie die Begriffe *irreduzibles Element*, *Primelement*, *Primideal*, *maximales Ideal* in Ringen. Wie hängen diese Begriffe zusammen?

Fingerübung B (irreduzibel?)**.** Welche der folgenden Polynome sind irreduzibel?

1. $T^2 + 2 \in \mathbb{F}_3[T]$,
2. $T^{2026} + 2027 \cdot T^{2025} - 2027 \in \mathbb{Z}[T]$
3. $5 \cdot T^3 + 555 \cdot T^2 + 555555 \cdot T + 2055 \in \mathbb{Z}[T]$,
4. $\frac{1}{2} \cdot T^3 + 1 \in \mathbb{Q}[T]$.

Fingerübung C (irreduzibel??)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. Jedes irreduzible Polynom in $\mathbb{Z}[T]$ ist auch in $\mathbb{Q}[T]$ irreduzibel.
2. Jedes Polynom in $\mathbb{Z}[T]$, das in $\mathbb{Q}[T]$ irreduzibel ist, ist in $\mathbb{Z}[T]$ irreduzibel.

Fingerübung D (Restklassenring)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. Ist $p \in \mathbb{Z}[T]$ prim, so ist $\mathbb{Z}[T]/(p)$ ein Körper.
2. Ist $p \in \mathbb{Q}[T]$ prim, so ist $\mathbb{Q}[T]/(p)$ ein Körper.

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Restklassenkörper; 2 (=0+2) Punkte)**.** Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

0. Wiederholen Sie, wann ein Restklassenring ein Körper ist.
1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}_7[T]/(T^2 + 1)$ ein Körper mit genau 49 Elementen ist.

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf präzise und verständliche Formulierungen. Der Leser soll lesen, nicht dechiffrieren.

Aufgabe 1 (Körper? 4 (=2+2) Punkte)**.** Zu $a \in \mathbb{Z}$ sei $f_a := T^4 + a \cdot T + 2 \in \mathbb{Z}[T]$ und $K_a := \mathbb{Q}[T]/(f_a)$.

1. Zeigen Sie: Es gibt unendlich viele $a \in \mathbb{Z}$, für die K_a ein Körper ist.
2. Geben Sie ein Beispiel für eine Zahl $a \in \mathbb{Z}$, für die K_a *kein* Körper ist. Begründen Sie Ihre Antwort!

Bitte wenden

Aufgabe 2 (irreduzibel? 4 (=2+2) Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Das Polynom $T^3 + 2025 \cdot T^2 + 42 \cdot T + 9 \in \mathbb{Z}[T]$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[T]$.
2. Das Polynom $X^2 \cdot Y + Y^2 \cdot X^{2025} + X + Y + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{F}_2[X, Y]$.

Aufgabe 3 (noch ein Irreduzibilitätskriterium; 4 (=3+1) Punkte)**.**

1. Sei $f \in \mathbb{Z}[T] \setminus \{1\}$ ein normiertes Polynom vom Grad höchstens 3 mit folgender Eigenschaft: Für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt
$$a \mid f(0) \Longrightarrow f(a) \neq 0.$$
Zeigen Sie, dass f in $\mathbb{Z}[T]$ und in $\mathbb{Q}[T]$ irreduzibel ist.
2. Geben Sie ein Beispiel für ein Polynom, auf das dieses Kriterium anwendbar ist, auf das aber das Eisensteinsche Reduzibilitätskriterium für keine Primzahl anwendbar ist. Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4 (iterirreduzibel; 4 = (1+1+1+1) Punkte)**.** Wir betrachten die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{Z}[T]$, die durch $f_0 := T$, $f_1 := T^2 - 2$ und
$$f_{n+1} := f_1(f_n)$$
für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ rekursiv durch Einsetzen definiert ist.

1. Bestimmen Sie die Koeffizienten von f_3.
2. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}_{>1}$ gilt $f_n(0) = 2$.
3. Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Reduktion von f_n modulo 2.
4. Zeigen Sie, dass f_n in $\mathbb{Q}[T]$ irreduzibel ist.

Bonusaufgabe (invariant und irreduzibel; 4 Punkte)**.** Sei $p \in \mathbb{N}$ prim. Zeigen Sie, dass
$$T^p - T - 1 \in \mathbb{F}_p[T]$$
in $\mathbb{F}_p[T]$ irreduzibel ist.
Hinweis. Dieses Polynom ist unter dem von „$T \longmapsto T + 1$" induzierten Ringisomorphismus $\mathbb{F}_p[T] \longrightarrow \mathbb{F}_p[T]$ invariant. Betrachten Sie nun die Primfaktorzerlegung ...

Abgabe bis 9. Januar 2026, 8:25, via Briefkasten/GRIPS

Frohe Weihnachten und ein gutes Neues Jahr!